Fco. Javier Domínguez S.

Curso de Hidráulica General

(*Continuación*)

CAPITULO IV

Pérdidas de carga generales

Ecuación de las corrientes permanentes

22. Consideraciones generales. Disipación de la energía en las dos formas de escurrimiento.—23. Movimientos estratificados. Frotamientos propiamente dichos. Viscosidad. Expresión de la pérdida de carga.—24. Escurrimientos turbulentos. Dos formas de frotamientos: parietales e interiores, diferentes de los del régimen de Poiseuille. Sus pérdidas de cargas generales. Teoría de Boussinesq.—25. Estado actual de la cuestión. Conclusiones.—26. Fórmulas de pérdidas de carga generales en los escurrimientos turbulentos.—27. Límites entre ambos regímenes: velocidad crítica.—28. Ecuación de las corrientes permanentes.

22. Consideraciones generales.—Se denominan frotamientos, en Hidráulica, a las absorciones de energía que efectúan las componentes tangenciales de las presiones que acompañan a todo movimiento de líquidos naturales. Las acciones mutuas de las moléculas en movimiento y las acciones de ellas con la pared, son las que determinan la forma general del movimiento del conjunto de la corriente.

Como se ha dicho al empezar el Curso, esas componentes tangenciales de las presiones que absorben energía, son función de la velocidad. La pérdida de carga es entonces función de la velocidad y varía de una clase de movimiento a otro. Las formas más importantes de movimientos respecto a la pérdida de carga, son las que constituyen los regímenes ya definidos: tranquilo y turbulento.

El primero, llamado también *régimen estratificado o laminar*, o régimen de Poiseuille, es el que se verifica generalmente con pequeñas velocidades, por filetes o capas; es decir, por trayectorias fijas, en que una partícula tras de otra lleva la dirección general del movimiento. Este régimen, propio de las canalizaciones de pequeñísimas dimensiones (del orden de los milímetros), puede sin embargo encontrarse en las singularidades con grandes velocidades, donde se producen rápidas aceleraciones. Fué descubierto y estudiado experimentalmente por el doctor Poiseuille (1).

El *régimen turbulento* o *hidráulico,* propio de las velocidades de la práctica del ingeniero, se verifica sin orden aparente; en él las partículas llevan trayectorias muy complicadas, sembradas de torbellinos. Osborne Reynolds lo llamó movimiento sinuoso. Torbellinos que parten de la pared se extienden a la masa líquida, desarrollándose hasta el centro. De aquí vuelven a la pared, de la cual son nuevamente reflejados hacia el interior y pierden poco a poco su energía en este vaivén. En este régimen no puede hablarse rigurosamente de movimiento permanente, pues su característica más aparente es la inestabilidad; pero, como queda dicho, y volveremos sobre ello, los términos medios de las circunstancias del escurrimiento pueden ser constantes, constituyendo un *movimiento medio local permanente.*

Solamente en el régimen estratificado puede hablarse con alguna propiedad de frotamientos. En el régimen turbulento, por analogía y para generalizar, puede darse esa denominación a las acciones mal conocidas entre el líquido y la pared y consigo mismo, acciones que le van restando energía al escurrir.

23. Movimientos estratificados.—Frotamientos propiamente dichos.—Viscosidad.—Expresión de la pérdida de carga.—El estudio analítico del régimen de Poiseuille ha sido hecho intuitivamente aun antes de haberlo descubierto experimentalmente, por Newton (1687), Navier (1822); Poisson, (1829); Barre de St. Venant, (1843); y Stokes, (1843); quienes establecieron en las ecuaciones generales de la Hidrodinámica la acción de las componentes tangenciales de las presiones. No determinaremos aquí la pérdida de carga avaluando los esfuerzos debidos a la viscosidad: avaluados los esfuerzos se calculan los trabajos que ellos efectúan en el desplazamiento de la partícula. Directivas de estas investigaciones han sido las experiencias de Coulomb (1800), que demuestran la proporcionalidad de los frotamientos con las velocidades, a la primera y segunda potencia (2).

En el movimiento estratificado la velocidad decrece desde el centro hasta anularse en la pared. En estas condiciones, y dependiendo el frotamiento de la velocidad, no existe influencia de la pared en el escurrimiento, salvo el caso en que las asperezas, o más bien las ondulaciones de ésta, influyan en la deformación de las trayectorias. Las únicas causas de disipación de energía son las acciones mutuas de un filete líquido con sus vecinos. Estas acciones son proporcionales a la extensión de las superficies de contacto, son independiente de las presiones. El filete más veloz tiende a acelerar al más lento, y vice versa. Como intuitivamente lo estableció Newton, el frotamiento entre un filete y otro, es proporcional a la rapidez con que la velocidad varía de un punto a otro de la sección normal. Como es imposible aceptar variaciones finitas de la velocidad entre un filete y sus vecinos, esta relación se expresa por la derivada $\frac{du}{dn}$, que es el gradiente de la velocidad en la

(1) Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petites diamètres, 1840-1841-1844.

(2) La resistencia que opone un sólido inmóvil al agua en movimiento es, según Coulomb, de la forma: $r = au + bu^2$, siendo u la velocidad del agua.

sección. El número de kgs. de energía disipada por unidad de superficie queda dado por el producto de esta derivada por el coeficiente de viscosidad η (1).

Si atendemos a que las dimensiones de la derivada $\frac{du}{dn}$ son T^{-1}, o sea, las de una velocidad angular, las de η resultan ser $L^{-1} M T,^{-1}$ que se pueden expresar en Kgs. por segundo y por metro cuadrado en unidades industriales.

Las medidas del coeficiente η hechas por algunos experimentadores son perfectamente concordantes; η depende de la naturaleza del líquido, varía inversamente con la temperatura, es prácticamente independiente de la presión. Según Poiseuille, vale en el agua (2)

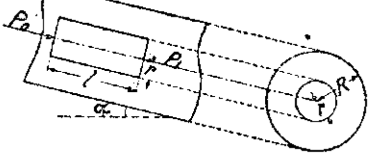
$$\eta = \frac{0{,}000\ 1814}{1 + 0{,}0337\ t + 0{,}00022\ t^2} \text{ Kgs. : seg. : m}^2 \qquad (1$$

en que t es la temperatura en grados centígrados. He aquí los valores de η a diversas temperaturas:

$t =$	$0°$	$10°$	$20°$	$50°$	$100°$
$\eta =$	0,0001814	0,0001335	0,0001029	0,000056	0,000028

En las cercanías de la temperatura de *cero* grados el coeficiente de viscosidad del éter es de *13 %* el del agua, el del mercurio *90 %*, el del aceite de oliva *56* veces mayor y el de la glicerina *438* veces mayor.

Para estudiar el movimiento permanente que se efectúa dentro de un tubo de radio constante donde existe un escurrimiento estratificado, aislamos dentro de él un cilindro líquido de longitud l y de radio r concéntrico con el tubo. (*Fig. 24*).



Fih. 24

La resultante de las fuerzas que lo solicitan se compone de las presiones en sus caras terminales: $(p_o - p_1)\ \pi r^2$ de la componente del peso $\gamma \pi r^2\ l\ sen\ \alpha$ y de los frotamientos. Si observamos que $l\ sen\ \alpha$ es la diferencia de cotas de dos puntos homólogos cualesquiera de las caras terminales, podremos poner:

$$\left(z_0 + \frac{p_0}{\gamma} - z_1 - \frac{p_1}{\gamma} \right) \gamma \pi r^2$$

Las fuerzas de frotamiento que obran en la superficie cilíndrica $2\pi r l$, valen:

$$2\pi r l \eta \frac{du}{dr}$$

(1) Los ingleses lo denominan μ. En Francia y Alemania, η. Al coeficiente de importancia análogo que existe en los movimientos hidráulicos, se llama en Francia ε.

(2) Se llama coeficiente cinemático de la viscosidad a la razón η/δ, es decir, a η dividido por la densidad y se le designa con la letra μ.

Como se oponen al movimiento, observando que $\frac{du}{dr}$ es negativo, tendremos la igualdad:

$$\left(z_0 + \frac{p_0}{\gamma} - z_1 - \frac{p_1}{\gamma}\right)\gamma\, r = -\,2\, l\, \eta\, \frac{du}{dr}$$

El paréntesis del primer miembro, dividido por l, es la pérdida de carga por unidad de longitud, llamada J. Luego, si dividimos esta ecuación por l, separamos variables e integramos desde un radio cualquiera r donde la velocidad es u hasta el radio R del tubo, donde la velocidad es cero, obtenemos:

$$\gamma J \int_r^R r\, dr = -\,2\,\eta \int_u^0 du$$

$$\gamma J\, \frac{(R^2 - r^2)}{2} = 2\,\eta\, u$$

$$u = \frac{\gamma}{4\,\eta}\,(R^2 - r^2)\, J$$

ecuación que da la velocidad a una distancia r del centro.

El gasto total es:

$$Q = \int_o^\Omega u\, d\omega = \int_o^R u\, 2\,\pi\, r\, dr = \frac{\gamma J}{4\,\eta}\, 2\,\pi \int_o^R (R^2 - r^2)\, r\, dr$$

$$Q = \frac{\gamma\,\pi\, J}{8\,\eta} R^4 = \frac{\gamma\,\pi\, J\, D^4}{128\,\eta} \qquad (2$$

La velocidad media es:

$$U = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\gamma J R^2}{8\,\eta} = \frac{\gamma J D^2}{32\,\eta} \qquad (3$$

o si se quiere:

$$J = \frac{8\,\eta\, U}{\gamma R^2} = \frac{32\,\eta\, U}{\gamma D^2} \qquad (4$$

expresión que dice que la pérdida de carga es proporcional a la primera potencia de la velocidad. Si tomamos η igual a *0,000133* a la temperatura de *10°*, tendremos:

$$J = 0{,}00000106\, \frac{U}{R^2} = 0{,}00000424\, \frac{U}{D^2} \qquad (4a$$

Las experiencias de Poiseuille de acuerdo con este raciocinio, dieron para el gasto la fórmula empírica:

$$Q = K J D^4 \qquad (5$$

El coeficiente K, que depende únicamente de la naturaleza del líquido y de su temperatura, engloba el valor teórico $\frac{\gamma \pi}{128 \eta}$. A continuación va una comparación de este coeficiente con K.

$$t = \quad 0^\circ \qquad 10^\circ$$

$$\frac{\gamma \pi}{128 \eta} = 136800 \qquad 188700$$

$$K = 135282 \qquad 181101$$

24. Escurimientos turbulentos.—En los movimientos turbulentos los fenómenos de disipación de energía son totalmente diferentes de los estudiados en el escurrimiento estratificado. Las leyes rigurosas de variación de velocidades y presiones en cada punto o la que rige la distribución de trayectorias de las moléculas líquidas dentro de la masa, nos son hoy día imposibles de alcanzar. La experimentación de Bazin que, como se ha dicho, autoriza a prescindir de la pulsación y a estudiar únicamente los términos medios constantes de los valores reales, ha permitido sentar leyes aproximadas. En movimientos uniformes, es decir, buscando la simplicidad que introduce la constancia de la velocidad media y de la magnitud de la sección, han sido formuladas esas leyes, interpretando los datos experimentales en la forma más sencilla: asimilando este movimiento al movimiento por filetes paralelos. Así presentado el problema se ha podido hablar de movimiento turbulento permanente, en el cual es constante en cada punto la velocidad media local.

Para encontrar las relaciones que ligan la pérdida de carga con los elementos mensurables de la corriente: velocidad, presión y sección, se estudian las dos clases de acciones que absorben energía: *frotamientos parietales* y *frotamientos interiores.*

En el escurrimiento turbulento queda unida a la pared una delgada película líquida de centésimas de milímetro de espesor, que no está en reposo sino que se mueve con movimiento estratificado, con velocidad rapídisimamente variable, entre lo que llamaríamos el borde interior de la delgada capa y la pared misma. La velocidad que se llama parietal u_o es precisamente la que existe en ese borde interior que separa la capa del resto de la corriente. La pared queda embebida por el líquido que en ella penetra y el deslizamiento, que se verifica con movimiento estratificado en la delgada capa, sigue las sinuosidades o asperezas de la pared que son de mayor tamaño que su espesor, borrando las de orden inferior. Antiguamente se exageraba el espesor de esta película y se creía que era inmóvil y que borraba todas las asperezas de la pared, aceptándose, en consecuencia, únicamente deslizamiento de líquido sobre un «guante líquido».

Según Boussinesq una partícula al escurrir choca contra lo que podríamos llamar la superficie de separación de la película adherida y el resto de la corriente, se refleja ahí yéndose hacia el centro de la masa líquida. Estos choques producen pérdida de la energía que la molécula posee, cuya magnitud es proporcional a la velocidad de choque y cuyo número también lo sería; de modo que puede aceptarse que la pérdida de carga es función de la velocidad a la segunda potencia. Llamamos frotamientos parietales a todas las acciones de disipación de energía que se efectúan en la delgada capa adherida a la pared. La experimentación dice que los frotamientos parietales son proporcionales a la magnitud de la superficie sólida en contacto con la corriente; que son proporcionales a una potencia de la velocidad cercana a *dos*, menor si la rugosidad es poca y aun mayor de *dos* si la rugosidad es mucha. Son proporcionales también a una constante física que depende de la rugosidad de la pared y del grado de turbulencia, llamada B por Boussinesq. También dependen los frotamientos parietales de la naturaleza del líquido que toca a la pared, expresada por el peso específico. Los frotamientos son, en cambio, independientes de las presiones. Para simplificar y por analogía con las pérdidas de carga singulares que son proporcionales al cuadrado de la velocidad, acepta esta potencia y escribe que el número de kgs. de energía disipada en frotamientos parietales por metro cuadrado de superficie, es dado por la expresión:

$$\gamma B u_0^2 \qquad (6$$

Las dimensiones que resultan para B son, según esto, $L^{-1} T^2$, es decir, inversas de una aceleración. Los valores de B son experimentales y, como se dijo, dependen de la rugosidad y del grado de turbulencia, aumentando con ambas.

Los frotamientos interiores de un movimiento turbulento los presenta Boussinesq en forma análoga a los de los movimientos estratificados, expresando que por metro cuadrado de superficie de contacto, el número de kgs. de energía disipada es dado por la expresión:

$$\varepsilon \frac{du}{dn} \qquad (7$$

en que ε no es el coeficiente de viscosidad, sino el coeficiente de turbulencia. Depende ε de una constante física A, función de la aspereza de la pared, ligada a la de frotamientos parietales por la relación:

$$A = \frac{1}{K} \sqrt{B} \qquad (8$$

En esta expresión, K depende a su vez de la naturaleza y estado del líquido; es decir, algo también de su viscosidad. El valor medio de K, deducido por Boussinesq de las experiencias de Bazin, es *48* en metros y segundos, y sus dimensiones son $L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$; pues las de A son $L^{-1} T^2$, iguales a las de B; depende también del peso específico del líquido y de la velocidad parietal u_o. Por último, según Bossinesq, ε es también función del tamaño y forma de la sección normal, expresada por el *radio hidráulico*, que había sido definido por Chezy, razón de la sección Ω al perímetro mojado χ (*fig. 25*).

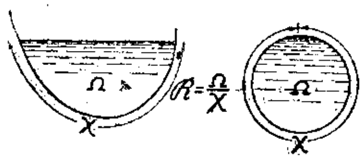


Fig. 25

$$R = \frac{\Omega}{\chi} \tag{9}$$

En secciones circulares o semicirculares agrega a ε otro factor, que simplificado es R/r, porque la turbulencia se concentra hacia el centro.

En secciones circulares o semicirculares el radio hidráulico es

$$R = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2} \tag{9a}$$

y en secciones rectangulares muy anchas de base b y altura h, en que h es pequeño al lado de b,

$$R = \frac{b\,h}{b + 2\,h} \tag{9b}$$

tiende a h. Boussinesq considera esos dos casos sencillos y adopta para ε los valores:

$\varepsilon = \gamma A u_o h$ canales rectangulares muy anchos (10a

$\varepsilon = \gamma A u_o \dfrac{R}{r} \cdot \dfrac{R}{2}$ $\begin{cases}\text{canales semicirculares}\\ \text{cañerías circulares}\end{cases}$ (10b

Este coeficiente de turbulencia da la carga absorbida por los frotamientos multiplicada por la misma derivada $\dfrac{du}{dn}$ de la velocidad respecto al cambio de lugar de la sección, que vimos en los movimientos estratificados. Aquí se refiere a velocidades medias locales.

Sin entrar en mayores detalles sobre las consideraciones que llevan a Boussinesq a fijar las dependencias de ε, entremos, siguiendo a este sabio, en la determinación de la distribución de velocidades, del gasto, de la velocidad media y de la pérdida de carga en corrientes turbulentas uniformes, en los dos casos simplificatorios ya mencionados: canales rectanculares muy anchos, en los cuales se puede considerar los fenómenos por unidad de ancho y en que la ubicación del filete queda definida por la hondura o distancia vertical a la superficie libre; y corrientes circulares o semicirculares en que el filete líquido queda definido por el radio o distancia al centro.

Comenzaremos por la corriente rectangular muy ancha que va escurriendo con movimiento uniforme, es decir, aquella en que la aceleración que tiende a imprimirle la componente del peso, es equilibrada por los frotamientos. Estudiando un trozo de altura z y base de un metro, en la dirección del movimiento y un metro en la sección normal (*Fig. 26*), los frotamientos que equilibran a la componente del peso son los interiores. Notando que la derivada de la velocidad respecto al cambio de lugar en la sección es negativa si se acepta que la velocidad superficial es máxima, si llamamos I al seno del ángulo de los filetes con la horizontal, siempre muy pequeño en corrientes abiertas, y poniendo el valor de ε de arriba, se tiene:

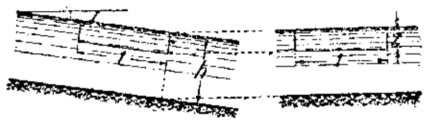


Fig. 26

$$\gamma z I = -\gamma A h u_o \frac{du}{dz}$$

Separando variables e integrando desde un punto de altura z en que la velocidad es u, hasta el fondo de altura h en que la velocidad es la parietal u_o, tenemos:

$$I \frac{h^2 - z^2}{2} (h^2 - z^2) = A h u_o (u - u_o) \qquad (11$$

El movimiento uniforme de un trozo de igual base pero de altura h, se produce porque la componente del peso es equilibrada por los frotamientos parietales sobre el metro cuadrado, o sea:

$$\gamma h I = \gamma B u_o^2$$

de donde
$$I = \frac{B u_o^2}{h} \qquad (11a$$

y de aquí sacamos
$$u_o = \sqrt{\frac{h I}{B}} \qquad (11b$$

La ecuación (*11 b*, introducida arriba, en la (*10*, despejando u. nos dice que:

$$u = u_o \left[1 + \frac{B}{2A} \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \right] \qquad (12$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{B}} \left[1 + \frac{B}{2A} \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \right] \sqrt{h I} \qquad (12a$$

es decir, que la repartición vertical de velocidades de esta forma de corriente es como las ordenadas de una parábola.

La velocidad media

$$U = \frac{1}{\Omega}\int_0^{\Omega} u\, d\omega = \frac{1}{h}\int_0^{h} u\, dz$$

será, haciendo el integral,

$$U = \frac{1}{\sqrt{B}}\;(1 + \frac{B}{3A})\;\sqrt{h\,I} \qquad (13$$

Notemos que en esta ecuación, I es el descenso de la cota piezométrica en la unidad de longitud. Introduciendo el valor de A dado por la ecuación (*8*, se obtiene:

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{K}{3}\right)\sqrt{h\,I} \qquad (14$$

Razonando del mismo modo en una corriente circular de radio R cerrada, en que aislamos un cilindro concéntrico con ella de 1 m. de altura y de radio r, si llamamos p_o y p_1 las presiones en los centros de las caras anterior y posterior, respectivamente, y notando que el conducto puede tener una inclinación cualquiera α respecto a la horizontal, se tiene: (1).

$$\gamma\, sen\, \alpha\, \pi\, r^2 + (p_o - p_1)\, \pi\, r^2 = -A\, \gamma\, u_o\, \frac{R}{2}\, \frac{R}{r}\, \frac{du}{dr}\, 2\, \pi\, r$$

en donde, separando variables e integrando como antes, se tiene:

$$\frac{R^3 - r^3}{3}\left(sen\, \alpha + \frac{p_o - p_1}{\gamma}\right) = A\, R^2\, u_o\, (u - u_o)$$

La cantidad entre paréntesis es el descenso de cota piezométrica efectuado por la corriente en la unidad de longitud considerada, (como lo era en el caso del canal muy ancho). En movimiento uniforme es constante a lo largo de la corriente la sección, la velocidad y por lo tanto la altura de velocidad media. En consecuencia el *descenso de la cota piezométrica es la pérdida de carga debida a los frotamientos*. Por unidad de longitud la llamaremos J y tenemos:

$$J\,\frac{R^3 - r^3}{3} = A\, R^2\, u_o\, (u - u_o)$$

(1) Boussinesq hace notar que con la expresión de $\varepsilon = \gamma\, A\, u_o\, \frac{R}{2}\, \frac{R}{r}$, que tiende a infinito al acercarse al centro queda compensada con la tendencia a cero de la derivada du/dr que en el centro pasa por un máximo.

El movimiento uniforme de un trozo de toda la corriente, en un metro de longitud nos da:

$$\gamma \, sen \, \alpha \, \pi \, R^2 + (p_o - p_1) \, \pi \, R^2 = \gamma \, B \, u_o^2 \, 2 \, \pi \, R$$

de donde
$$J = \frac{2 \, B \, u_o^2}{R} \tag{15a}$$

y
$$u_o = \frac{1}{\sqrt{B}} \sqrt{\frac{R}{2} J} \tag{15b}$$

Introduciendo arriba se llega a

$$u = u_o \left[1 + \frac{2 \, B}{3 \, A} \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) \right] \tag{16}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{B}} \left[1 + \frac{2 \, B}{3 \, A} \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) \right] \sqrt{\frac{R}{2} J} \tag{16a}$$

Lo que dice que la distribución radial de velocidades es según las ordenadas de una parábola cúbica.

La velocidad media

$$U = \frac{1}{\pi \, R^2} \int_o^R u \, 2 \, \pi \, r \, dr$$

ejecutando resulta:

$$U = \frac{1}{\sqrt{B}} \left(1 + \frac{2 \, B}{5 \, A} \right) \sqrt{\frac{R}{2} J} \tag{17}$$

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{2}{5} K \right) \sqrt{\frac{R}{2} J} \tag{18}$$

La cantidad entre paréntesis, tanto aquí como en la ecuación (*14*, depende sólo de las constantes físicas A y B, que como se dijo son función de la aspereza de la pared y de la naturaleza del líquido; se pueden llamar C y C_1. Se nota además que h en la ecuación (*14*, es el radio hidráulico y $R/2$ lo es en la (*18*, y como I y J son la pérdida de carga, se puede escribir la fórmula general:

$$U = C\sqrt{\mathbf{R} \, J} \tag{19}$$

o sea:
$$J = \frac{U^2}{C^2 \, \mathbf{R}} \tag{20}$$

4

Si de los valores experimentales de C, nos elevamos por medio de A y B de Boussinesq al valor de ε, se encuentra que en movimientos turbulentos es unos cuantos miles de veces mayor que el coeficiente de viscosidad y su valor se acerca a la unidad.

Los valores de las constantes A y B que llama Boussinesq medios, deducidos de la experimentación, serían: (1)

$$B = 0{,}000885 \qquad A = \frac{1}{48}\sqrt{0{,}000885} = 0{,}00062$$

Después de Boussinesq, son varios los hidraulicistas que se han preocupado de determinar las relaciones y leyes que rigen los frotamientos en movimientos turbulentos. No se puede pretender, como lo dice Rabut, que la teoría de Boussinesq expuesta, corresponda seguramente a la realidad, pues en primer lugar, no se aplica al fenómeno mismo sino a un movimiento ficticio, y además se puede llegar a coincidir con los resultados experimentales haciendo hipótesis muy diversas que las de ese sabio. Así, por ejemplo, René Koechlin (1) parte de la energía perdida por las moléculas que chocan contra la pared, y acepta la expresión de los frotamientos interiores de Newton $\varepsilon \cdot \frac{du}{dn}$ poniendo provisionalmente un coeficiente ε que llama de cohesión y a cuyo valor llega después de haber deducido la repartición de velocidades en caso de secciones de forma sencilla y de haber encontrado relación entre la velocidad media, la pendiente, el radio hidráulico, la rugosidad de la pared y el coeficiente de cohesión. Esa relación es:

$$U = \left(K_1 + \frac{1}{3}\;\frac{\gamma\sqrt{I}}{\varepsilon}\;\mathrm{R}^{3/2}\right)\sqrt{\mathrm{R}\,I} \qquad (21$$

en esta ecuación, escrita con las mismas denominaciones dadas arriba

$$K_1 = \sqrt{\frac{2g}{f_1}} \qquad (22$$

siendo f_1 es el coeficiente de rugosidad. Koechlin llega para ε al valor

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\,\gamma\,\frac{I\,h^2}{v_s - v_f} \qquad (23$$

en que h es la profundidad, v_s la velocidad superficial y v_f la del fondo.

---

(1) En realidad, el coeficiente B es muy variable. He aquí los valores extremos:

Corrientes pequeñas..............	(R = 0,2 m.)	Corrientes grandes...........	(R = 2 m.)
Paredes lisas.....................	$B = 0{,}0006$	Paredes lisas................	$B = 0{,}00032$
Paredes ásperas..................	$B = 0{,}0085$	Paredes ásperas.............	$B = 0{,}00230$

(2) Mecanisme de l'eau. Paris 1924. Entre los alemanes es digno de mencionar el estudio de la turbulencia de Weil, en Neue Grundlagen der technischen Hydrodynamik. Berlín 1920.

25. Estado actual de la cuestión. — Conclusiones. — La cuestión de los frotamientos de turbulencia que, como se dijo, está muy lejos de ser dominada por el cálculo, podría resumirse siguiendo a Mouret (1) en la forma siguiente: las experiencias que se han hecho para averiguar los frotamientos en los líquidos, son de dos clases: o bien son de laboratorio, que podríamos decir científicas, o bien son de ingenieros, con fin inmediatamente utilitario. Las primeras en pequeño, (2) son precisas. Las otras, la gran mayoría, tienden a dar fórmulas de cálculo rápidamente aplicables, menos precisas en general (3). Fué Darcy quien dió luz clara sobre la influencia decisiva de las asperezas de la pared en la pérdida de carga, llevando a su verdadero papel la capa líquida adherida a la pared, que siguiendo las sinuosidades de ella solamente hace desaparecer la influencia de asperezas de mínimo tamaño. En la pared nacen los torbellinos que se propagan hacia el centro. La intensidad de la agitación turbulenta se debe a la aspereza de la pared y crece con la velocidad parietal y con la extensión de la pared mojada. Los torbellinos son los verdaderos agentes de la pérdida de carga, pues transforman la fuerza viva del movimiento recto en giratorio. La fuerza viva de este movimiento se transforma fácilmente en calor, pues aumentan las superficies llamadas de deslizamiento y, por consiguiente, los movimientos secundarios de distorsión. No existe aún un estudio completo de los torbellinos, cuya teoría elemental es sencilla. La influencia de la velocidad en los frotamientos, que Boussinesq acepta ser de proporcionalidad a la segunda potencia, como en los choques, en realidad es más compleja. Coulomb daba una proporcionalidad a las potencias *1* y *2* según la expresión (4):

$$J = \alpha U + \beta U^2 \qquad (24$$

que revela que si U es muy pequeño solamente influye el primer término, y si es grande tiene más influencia el segundo. Así esta expresión podría abarcar ambos regímenes. Reynolds acepta la pérdida de carga proporcional a U^n y n es función de la rugosidad de la pared, variando desde *1,79* si es muy lisa, hasta *2* en paredes ásperas. Según Lees, la resistencia interior es de la forma:

$$J = \alpha U^{1{,}65} + \beta U^2 \qquad (25$$

y es probablemente la más cerca de la realidad.

El tamaño y la forma de la sección normal tienen gran influencia, pues mientras mayores sean las dimensiones de la masa en que los torbellinos actúan, más grande será la absorción de energía que efectuarán. Mientras más ángulos presente la sección, en la vecindad de los vértices hay relativamente más extensión de pared por m² de sección de corriente, y por lo tanto mayor agitación turbulenta que,

(1) Mouret. Cours de Mécanique appliqué. Hydraulique—Ecole des Ponts et Chaussées. Paris 1922-1923. Curso poligrafiado, págs. 210—233.

(2) Debidas, además de Coulomb, a Froude, Couette, Gibson y Ryan.

(3) Fuera de las que citaremos después, y los más precisas son de Reynolds y Stanton & Pannel (1916).

(4) α y β no son simples factores numéricos, pues como esa ecuación corresponde a una pérdida de carga, entran en α y β todas las demás dependencias de J no expresadas explícitamente.

absorbiendo en esos puntos gran parte de la fuerza viva, produce disminución en la velocidad de traslación. Para medir la influencia de la magnitud y de la forma de la sección, se introduce en las fórmulas de pérdida de carga una inversa proporcionalidad con el radio hidráulico de que se habló: $R = \frac{\Omega}{\chi}$ Es claro que en secciones semejantes o afines, esta relación da idea de la influencia relativa de la extensión de pared manifestada por el perímetro; pero se puede imaginar secciones no semejantes y de igual radio hidráulico, cuyos ángulos produzcan distinta agitación turbulenta (1). Se ve que no basta el radio hidráulico para caracterizar la influencia de la pared en la pérdida de carga. Las experiencias de Bazin revelan sin embargo que no es muy grande el error que se comete aceptando simplemente el radio hidráulico, es decir prescindiendo de la forma misma de la sección, por simplicidad. Estas experiencias revelan, en cambio, la gran influencia que tiene la existencia de una superficie libre, que viene a ser una superficie indefinida donde los torbellinos tienen libre expansión y, por lo tanto, es causa de mayor absorción de energía.

La viscosidad casi no tiene influencia en los movimientos turbulentos. El peso específico del líquido tiene una influencia mayor, pero secundaria. La temperatura prácticamente no tiene ninguna.

La presión tampoco tiene influencia de importancia en estos movimientos, como tampoco la tenía en los estratificados, contrariamente a lo que sucede en los frotamientos de los sólidos. Se ha tratado de explicar esta diferencia esencial entre los frotamientos de los líquidos y los de los sólidos respecto a la presión, diciendo que ella aumenta el contacto real de los sólidos, aumentando la extensión de la superficie de contacto, de modo que en último término los frotamientos de los sólidos son también proporcionales a la superficie de contacto. Esta unión entre líquidos o entre líquidos y la pared sólida no aumenta con la presión, pues aunque ella sea muy pequeña, el líquido embebe y penetra en la pared.

Concluye Mouret diciendo que aun no estamos en vías de resolver por el cálculo el problema de frotamientos de líquidos en su naturaleza íntima y que hemos de recurrir a fórmulas empíricas o resúmenes gráficos de experiencias. En vez de buscar un rigor inútil, se contentan los experimentadores con hacer figurar en las fórmulas, en block, la pérdida de carga que los frotamientos van ocasionando por unidad de longitud de la corriente (2).

26. Fórmulas de pérdidas de carga generales en los escurrimientos turbulentos. —Los primeros en indicar que los frotamientos de los líquidos son proporcionales

---

(1) El radio hidráulico de la sección circular es $R = \frac{\pi R^2}{2 \pi R} = \frac{R}{2}$ y el del cuadrado $R = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$ bos serán iguales cuando $a = 2R$.

(2) Al estudiar más adelante las fórmulas experimentales usadas en el cálculo de corrientes abiertas y cerradas nos daremos cuenta que resulta poco útil una precisión aparente de las fórmulas de pérdida de carga ante la imposibilidad de expresar en forma exacta las rugosidades efectivas de las paredes, especialmente de los canales, que venían entre límites tan distanciados. En cañerías, la poca diferencia entre las rugosidades de la práctica permite una mayor precisión, que sin embargo dista muy lejos de acercarse a la exactitud. Basta analizar aún las más prolijas experiencias para encontrar diferencias desconcertantes.

al cuadrado de la velocidad fueron, independientemente, Brahms (1753), en Holanda, y Chézy (1775), en Francia. Expresaron también que la pérdida de carga que los frotamientos producían, era función inversa del radio hidráulico, por medio de la expresión (*20*, ya citada:

$$J = \frac{b\,U^2}{R}$$

El coeficiente b que Chézy aceptaba constante, se suele escribir $1/C^2$, para escribir la ecuación (*19*, de U dada anteriormente:

$$U = C\sqrt{R\,J}$$

En esta expresión U es la velocidad media. Se llega a ella aceptando a priori que los frotamientos parietales son proporcionales a la superficie mojada y al cuadrado de la velocidad parietal y que ésta es función de la velocidad media, dependencia que se engloba en el coeficiente b. En efecto, se calcula en el movimiento uniforme de una corriente cerrada o abierta de sección Ω y de perímetro χ la pérdida de energía que el volumen Ωdl experimenta a lo largo de un camino $ds = U\,dt$ (Fig. 27). La fuerza tangencial de frotamientos, notando que los frotamientos interiores de un filete medio local son idénticos y contrarios a los de su vecino y que por lo tanto se anulan, se reduce a la producida por los frotamientos parietales en la superficie de contacto χdl a lo largo del camino $U\,dt$:

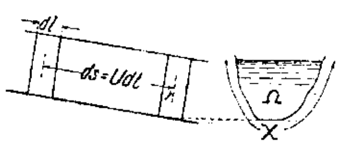


Fig. 27

$$\gamma\, B\, u_0^2\, \chi\, dl\, U\, dt$$

La pérdida de carga J nos da estos frotamientos por unidad de longitud y de peso, o sea, el valor de arriba dividido por $\gamma\,\Omega\,dl\,U\,dt$:

$$J = \frac{\gamma\, B\, u_0^2\, \chi\, dl\, U\, dt}{\gamma\,\Omega\, dl\, U\, dt} = \frac{B\, u_0^2\, \chi}{\Omega}$$

la expresión $B\,u_0^2$ con la velocidad parietal es incómoda y, como se dijo, se reemplaza por una función $\varphi\,(U)$, de la media que Chézy aceptó sencillamente ser $b\,U^2$, o bien, $\frac{U^2}{C^2}$ y se tiene:

$$J = \frac{b\,U^2\,\chi}{\Omega} = \frac{b\,U^2}{R} = \frac{U^2}{C^2\,R}$$

Esta expresión, que nada tiene de rigurosa, es aun hoy día aceptada en Hidráulica, o como primera aproximación, o como fórmula genérica, introduciéndole adecuados valores de b. Materia de los capítulos de las corrientes abiertas y cerradas son los valores experimentales de b, función compleja, según algunos, de R, según otros de U y según los más de U y R, además de serlo de la rugosidad de la pared (1). Adelantaremos aquí, sin embargo, abarcando velocidades usuales y radios hidráulicos de la práctica que b puede variar según la clase de pared desde *0,002* (C = *22*), en las muy ásperas, hasta *0,000124* (C = *90*), en las muy lisas. En radios hidráulicos pequeños, es decir, menores de 0,15 m. y paredes lisas como es el caso de las singularidades de contorno cerrado, se puede tomar C = *50*, es decir, $b = 0{,}0004$.

Siguiendo a Lamb y a Forchheimer se puede calcular el *espesor de la capa* que se adhiere a las paredes, capa en que, como dijimos, se verifica un escurrimiento estratificado cuyos frotamientos son equivalentes a los parietales que se desarrollan en la superficie interior de esta capa adherente.

En el espesor e de la capa, la velocidad varía desde u_o, a cero en la pared misma, y se puede aceptar, dada la pequeñez de e, que la derivada $\frac{du}{dn}$ es constante y que vale $\frac{u_o}{e}$. Los frotamientos interiores verificados por unidad de superficie a lo largo de un camino $u_o\, dt$ serán:

$$\eta \frac{u_o}{e} u_o\, dt$$

y son, por hipótesis, iguales a los parietales que se verifican a lo largo de $U_o\, dt$ en la unidad de superficie de separación de la capa y el resto de la corriente, que valen:

$$\gamma\, B\, u_o^2\, u_o\, dt$$

Se tiene, pues:

$$\eta \frac{u_o^2}{e} = \gamma\, B\, u_o^3$$

$$e = \frac{\eta}{\gamma\, B\, u_o} \qquad (26$$

es decir, que el espesor de la capa se hace más pequeño mientras mayor sea la la temperatura y la aspereza de la pared: tomando una temperatura de *10°*, que corresponde un coeficiente de viscosidad $\eta = 0{,}000133$ y aceptando un valor medio de $B = 0{,}000885$ se tiene: (2).

(1) Véase la nota de la página anterior.

(2) Con los valores de B dados en una nota anteriormente, se llegaría a los siguientes espesores de la capa adherente en agua a 10° de temperatura:

Corrientes pequeñas:	paredes lisas.........	$e = 0{,}00022/u_o$
	paredes ásperas.......	$e = 0{,}000016/u_o$
Corrientes grandes:	paredes lisas.........	$e = 0{,}00042/u_o$
	paredes ásperas.......	$e = 0{,}000057/u_o$

Esto fijaría un criterio para juzgar el tamaño de las asperezas que no influyen porque quedan embebidas en la capa adherente.

$$e = \frac{0{,}00015}{u_0}$$

es decir que vale *1,5* décimos de milímetro para un metro de velocidad parietal.

27. Límites entre ambos regímenes. Velocidad crítica.— Se ha dicho anteriormente que la pérdida de carga en el régimen tranquilo está dada, en función del diámetro de un conducto circular por la fórmula:

$$J_e = \frac{32\ \eta\ U}{\gamma\ D^2}$$

La de un movimiento turbulento de un conducto circular, notando que el radio hidráulico R = $D/4$ es, según lo dicho:

$$J_t = \frac{4\ b\ U^2}{D}$$

para un diámetro dado y a una temperatura dada, se puede poner:

$$J_e = K_e\ U \qquad \text{y} \qquad J_t = K_t\ U^2$$

Expresando estas relaciones en el gráfico de la figura 28, si se lleva en ordenadas los *log J* y en abscisas los *log U*, se ve que la pérdida de carga del movimiento estratificado que es una recta del coeficiente angular *1*, se corta con la del movimiento turbulento de coeficiente angular *2* en un punto *C*. Este sería el punto de cambio de régimen; es decir, que con velocidades menores es solamente posible el régimen de Poiseuille y con mayores, el turbulento. El punto C corresponde a la ecuación:

$$\frac{32\,\eta\,U}{\gamma\,D^2} = \frac{4\,b\,U^2}{D}$$

que da para la velocidad el valor:

$$U = \frac{8\,\eta}{\gamma\,D\,b} \qquad (27$$

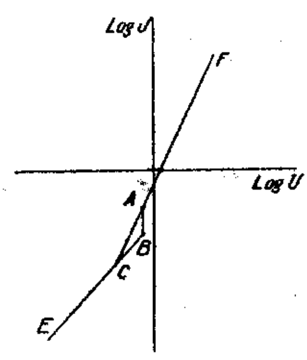


Fig. 28

Las experiencias de Reynolds indicaron para la velocidad del cambio de régimen, que él llamó *crítica*, una expresión análoga a ésta; (1) pero el fenómeno no es tan simple como el gráfico indica, pues hay una zona en que los dos regímenes son posibles: si se opera aumentando U, se puede llegar con el movimiento estratificado hasta un punto B, y ahí bruscamente el movimiento se desordena y convierte en turbulento. Si se opera disminuyendo las velocidades, el régimen turbulento permanece hasta C. Entre los puntos C y A o C y B, los dos regímenes son posibles y se presentan alternativamente, como lo experimentó Couette observando una vena que vaciaba un depósito a través de un tubo de casi *30* cm. de longitud y de *2,6* mm. de diámetro. El vaciamiento con cargas superiores a *0,75* m. daba una vena áspera, propia del movimiento turbulento. Entre cargas de *0,75* a *0,35* m., la vena sufría sobresaltos irregularmente espaciados primero y regulares después. Los sobresaltos consistían en que se volvía a intervalos lisa y el chorro tenía entonces mayor alcance, retornándose bruscamente áspera con menor alcance. Con cargas menores de *0,35* m. la vena era definitivamente lisa (2). Esto prueba que hay una zona de transición entre ambos regímenes y que la pérdida de carga es menor en el régimen estratificado. En éste es solamente proporcional a U, mientras que en el turbulento lo es casi a U^2.

(*Continuará*).

---

(1) Se llama número de Reynolds a la relación:

$$N_c = \frac{\mathrm{R}\,U}{\nu}$$

en que R es el radio hidráulico y ν el coeficiente cinemático de viscosidad. Introduciendo en la ecuación de la velocidad límite el radio hidráulico $\mathrm{R} = D/4$ y el coeficiente cinemático de viscosidad $\nu = \eta/\delta$ se tiene:

$$U = \frac{2\nu}{g\,b\,\mathrm{R}}$$

de donde se puede despejar $2gb$:

$$2gb = \frac{4\nu}{\mathrm{R}\,U} = \frac{4}{N_c}$$

Se suele poner $b = f/2g$, haciendo que f sea un coeficiente numérico de frotamientos (pues las dimensiones de b son T^2/L, inversas de las de una aceleración) y se obtiene:

$$f = \frac{4}{N_c}$$

ecuación que sirve para determinar los frotamientos en modelos reducidos.

(2) Hemos repetido varias veces esta experiencia en el laboratorio, midiendo con ella aproximadamente el límite inferior de la velocidad crítica, en acuerdo suficiente con Reynolds.