GEROLD STAHL

Los universos del discurso y los sistemas correspondientes*

EL UNIVERSO del discurso, la clase de aquello que existe formalmente, no está fijado por el sistema lógico. Su elección depende de los problemas a que apliquemos dicho sistema. La posibilidad de elegir el universo del discurso se revela fecunda no sólo para problemas extralógicos, sino, también, para aquellos que atañen a la lógica misma, como el de la decisión de una parte importante del sistema de funciones. Una comparación de diferentes universos del discurso, abordada formalmente y con todo rigor, abre perspectivas interesantes.

Ante todo convenimos que, para poder hablar de una manera significativa de universos del discurso, éstos deberán tener un número cardinal de elementos, es decir, no consideraremos universos con un número negativo o fraccionario de elementos.

La forma usual del sistema de funciones de la lógica bivalente impone dos condiciones que restringen la libertad de la elección de universos. La primera, debida a la axiomatización del sistema, exige que el universo tenga por lo menos un elemento, en tanto que la segunda, impuesta por la teoría de los tipos, exige que no haya elementos de órdenes diferentes, como sería el caso si, por ejemplo, los valores de los argumentos de las funciones (entiendase siempre: funciones proposicionales) y las funciones mismas perteneciesen al mismo universo. Sin intentar la modificación de esta última condición, aceptaremos en lo que sigue modificar eventualmente la primera, lo que supone entonces una modificación del axioma correspondiente.

Antes de abordar la exposición misma es necesario aclarar los conceptos "validez" y "satisfactibilidad", que serán frecuentemente utilizados. Se llama "válida" una fórmula del sistema proposicional cuando ella es verdadera en todas las interpretaciones de sus símbolos de variables proposicionales y, "satisfactible", cuando es verdadera en por lo menos una interpretación. En el sistema de funciones se extiende esta definición también a los símbolos de variables funcionales e individuales y se agrega a la definición de "validez" la condición "para todos los universos no vacíos", y a la definición de "satisfactibilidad" la condición "para por lo menos un universo no vacío".

Esta definición semántica de los conceptos "validez" y "satisfactibilidad" no es muy satisfactoria, a menos que precisamos:

a) Cómo determinar la verdad en un caso, y

b) Cómo determinar que una fórmula es verdadera en todas las interpretaciones y para todos los universos no vacíos.

Es este último punto el que presenta sin duda las mayores dificultades. Aunque parece posible determinar la satisfactibilidad y la no-validez por tanteos, ya que bastaría encontrar un solo caso correspondiente, este método no permite resolver el problema de la validez y de la no-satisfactibilidad, puesto que, frecuentemente en el sistema de funciones, hay que considerar una infinitud de interpretaciones y de universos.

Aunque un tratamiento sintáctico tampoco resuelve completamente el segundo punto, lo preferimos, y nos contentaremos con una determinación limitada a ciertos sistemas y secciones de sistemas. Recurriremos a un esquema aritmético que se utiliza en la demostración de la consistencia del sistema proposicional y que se adapta perfectamente en lo que concierne a la validez y satisfactibilidad en dicho sistema.

* Conferencia dada en el *Institut d'Histoire des Sciences et des Techniques de l'Université de Paris*, bajo el título "Les univers du discours et les calculs correspondants", el miércoles 19 de diciembre de 1956 y publicada en los *Annales de l'Université de Paris*, Paris, 1957, 27/4. El presente artículo ha sido vertido al castellano por Humberto Gianini y revisado por el autor. La traducción contiene algunas modificaciones (especialmente de índole terminológica, aparte de un cambio en el criterio de validez y satisfactibilidad para el universo vacío) respecto al original en francés.

Limitándonos a la lógica bivalente asignamos a los símbolos de variables proposicionales dos valores: *0* ó *1* (en lugar de *verdad* y *falsedad*). Convenimos que la negación cambia el *0* en *1* e inversamente, y consideramos la disyunción como producto aritmético. Ya que toda fórmula del sistema proposicional puede ser expresada utilizando sólo la negación y la disyunción, obtendremos, según sean los valores que asignamos a los símbolos proposicionales, o el valor *0* o el valor *1* para cada fórmula.

Si obtenemos el valor *0* para todas las asignaciones diremos que la fórmula es "(sintácticamente) válida"* y si obtenemos el valor *0* para por lo menos una asignación, diremos que ella es "satisfactible". Con ayuda de matrices podemos investigar una asignación tras otra y, por cuanto el número de asignaciones en este sistema es siempre finito, llegaremos siempre a un resultado. Existen, además, diversos procedimientos mecánicos que facilitan esta tarea considerablemente.

El problema de precisar lo que significa "validez" y "satisfactibilidad" en el sistema básico de funciones no es tan simple como en el sistema proposicional. Es posible apoyarse hasta cierto punto sobre el mismo esquema aritmético de asignaciones que se utilizó para el sistema proposicional; pero un procedimiento demasiado simple, como el que consistiría en eliminar los cuantificadores y asignar a las simbolizaciones de las funciones con sus variables individuales los mismos valores que a los símbolos proposicionales, haría válida una fórmula como "$(Ex)Fx \supset (x)Fx$", resultado que no deseamos por razones mencionadas posteriormente (correspondencia entre fórmulas válidas y teoremas).

En todo esto hay que tener en cuenta que se trabaja también con fórmulas que son consideradas como válidas o satisfactibles en un solo o en algunos universos determinados. Por ejemplo, "$(Ex)Fx \supset (x)Fx$" es válida en un universo con un solo elemento, mas en ningún otro universo no vacío.

El procedimiento de precisar "validez" y "satisfactibilidad" en un universo no vacío determinado con un número finito de elementos no ofrece dificultades. Si el universo tiene *n* elementos, entonces en la fórmula que investigamos se reemplaza la expresión con cuantificador universal o (para validez) con símbolo de variable individual libre por una conjunción de *n* expresiones (que corresponden a la función repetida con las *n* individuos del universo) y la expresión con cuantificador existencial o (para satisfactibilidad) con símbolo de variable individual libre por una disyunción de *n* expresiones correspondientes. Si esta nueva fórmula es proposicionalmente válida (satisfactible), entonces la fórmula original es cuantificacionalmente válida (satisfactible) en el universo considerado.

En lo que antecede hemos precisado los términos "validez" y "satisfactibilidad" en dos usos importantes: validez (satisfactibilidad) proposicional y validez (satisfactibilidad) cuantificacional para un universo no vacío y finito determinado. La validez (satisfactibilidad) cuantificacional para un universo vacío se tratará más adelante.

Habiendo fijado así los términos, se deduce la correlación siguiente entre validez y satisfactibilidad, tanto en el caso proposicional como en el cuantificacional indicados: "La fórmula *A* no es válida" es equivalente a "La fórmula $\sim A$ es satisfactible" y "*A* no es satisfactible" es equivalente a "$\sim A$ es válida". Por definición extendemos estas equivalencias a todos los empleos de los términos "válido" y "satisfactible".

Si una fórmula es satisfactible en un universo no vacío determinado, entonces es satisfactible en por lo menos un universo no vacío y su negación no es *válida en todos los universos no vacíos* (no es válida en por lo menos un universo). Es por este camino que podemos precisar el término "no-validez cuantificacional general (es decir, respecto a todos los universos no vacíos)".

En ciertos casos se pueden introducir especificaciones del término "validez" sin que sea necesario precisarlo en la forma indicada antes. El primer ejemplo se refiere a la *validez* cuantificacional general en un caso en que es suficiente haber precisado el término "*no-validez* cuantificacional general". Helo aquí: "Si una fórmula dada es válida, entonces es un teorema" se demuestra por demostrar "Si la fórmula dada cumple con una condición determinada, entonces ella es teorema; si no lo hace, no es válida **.

El segundo ejemplo se refiere a la validez del sistema superior de funciones: Una cierta fórmula debe ser válida o no válida. Se demuestra que si no es válida es un

* o *en este sistema* también "tautológica".

**En la demostración dada por Goedel, de la completitud del sistema básico de funciones.

teorema. Esta alternativa contraviene la convención general de que una fórmula no válida no es un teorema. Por esta razón la fórmula debe ser válida*.

La atribución del sentido indicado a los términos "validez" y satisfactibilidad" se justifica puesto que conduce al siguiente importante metateorema:

> En el sistema proposicional o en el sistema básico de funciones una fórmula es válida (validez proposicional o cuantificacional general) si y solamente si ella es un teorema del sistema correspondiente, y satisfactible, si y solamente si su negación no es un teorema del sistema correspondiente.

Según la demostración de Goedel, no disponemos de un metateorema análogo para el sistema superior de funciones.

Volviendo ahora a los problemas que se plantean con respecto a los universos del discurso, indicaremos cuatro metateoremas (para el sistema básico de funciones) que permiten establecer relaciones entre los universos (no vacíos):

1) Si una fórmula es válida (satisfactible) en un universo determinado, entonces es válida (satisfactible) en todo otro universo que tiene el mismo número de elementos.

2) Si una fórmula es válida en un universo de enumerablemente infinitos elementos (es decir, en un universo que posee la misma potencia que el conjunto de los números naturales), entonces tal fórmula es válida en cualquier universo (esta es una de las formulaciones del teorema de Loewenheim).

3) Si una fórmula es válida en un universo, entonces lo es también en todo universo, que tiene un número menor de elementos.

4) Si una fórmula es satisfactible en un universo, entonces lo es también en todo universo que tiene más elementos.

Estos metateoremas y algunos otros son muy importantes. Su valor se manifiesta no sólo cuando se quiere decidir la validez y la satisfactibilidad, sino también, como ya se indicó, cuando se quiere decidir si una fórmula es teorema del sistema básico de funciones. Siempre podemos decidir si una fórmula es cuantificacionalmente válida o satisfactible en un universo no vacío y finito determinado. Esto nos puede servir, por ejemplo, para decidir la satisfactibilidad en todos los universos no vacíos: Supongamos haber decidido que una fórmula es satisfactible en un universo de 7 elementos. De acuerdo con nuestro cuarto metateorema, ella es luego satisfactible en todos los universos con más elementos. Queda por decidir si es satisfactible o no en un universo de 6, 5, etc., elementos, para saber si tal fórmula es cuantificacionalmente satisfactible en todos los universos no vacíos.

Sin embargo, un metateorema que se debe a Church, afirma que no es posible resolver el problema de la decisión para todas las fórmulas del sistema básico de funciones.

Cuando se habló de "validez (satisfactibilidad) cuantificacional general" nos referimos siempre a todos los universos no vacíos, excluyendo el universo que no contiene elementos. Debido al axioma "$(x)Fx \supset Fy$" el sistema usual de funciones es solamente aplicable a los universos que tienen por lo menos un elemento, lo que implica la excepción indicada. Este sistema básico de funciones —no es el único posible— que comprende entre sus axiomas el que ahora hemos indicado, puede denominarse "sistema (básico de funciones) Min 1"; así se señala que este sistema exige universos con por lo menos un elemento.

Sin introducir conceptos nuevos es posible definir algunos otros sistemas básicos de funciones. Estos serían especialmente Min 0 (para universos que tienen por lo menos 0 elementos), E 0 (exactamente 0 elementos) y Max 0 (a lo sumo 0 elementos). El más importante entre ellos es sin duda Min 0, que es aplicable a todos los universos, tengan o no elementos. Este sistema es más general que Min 1; pero muchos teoremas importantes de Min 1 no son teoremas de Min 0, mientras que (con una axiomatización conveniente) todos los teoremas de Min 0 son teoremas de Min 1.

Para demostrar ésto, nos referiremos al "teorema-clave", es decir, al teorema que caracteriza un sistema respecto a los universos del discurso. Sólo en vista de este teorema (o de estos teoremas, si hay dos) se modifican los axiomas. El teorema-clave (único) de Min 1 es:

$$(x)Fx \supset (Ex)Fx$$

* En la demostración de la incompletitud del sistema superior de funciones, dada por Goedel.

El teorema-clave (único) de Min 0 es:

$$(x)Fx. \supset . (Ex)Fx \vee \sim(Ex)Fx$$

Para establecerlo, no hay necesidad de un axioma especial como en Min 1 ($(x)\,Fx \supset Fy$), puesto que este teorema se deduce de los otros axiomas. Así, Min 1 es más completo que Min 0, ya que contiene además el axioma indicado y todos los teoremas que pueden ser derivados de él.

Queda por precisar ahora el criterio de validez (y de satisfactibilidad) para el universo vacío. Se definen los dos términos de modo que exista una correspondencia entre los teoremas de Min 0 y las fórmulas cuantificacionalmente válidas en todos los universos, vacíos o no vacíos. El criterio es el siguiente: Si en la fórmula investigada el símbolo de mayor alcance es una conectiva, entonces se consideran las expresiones unidas por la conectiva o la expresión precedida por la conectiva. Con esto se sigue hasta llegar a expresiones que (a) son símbolos proposicionales o (b) constan únicamente de un símbolo funcional seguido por símbolos individuales o (c) cuyo símbolo de mayor alcance es un operador. A una expresión del tipo (c) asignamos siempre el valor 0 si se trata del operador universal, y siempre el valor *1*, si se trata del operador existencial. Si tenemos una expresión del tipo (b) se la reemplaza, en todas las partes donde se presenta, por un símbolo proposicional que no figura en la fórmula entera.

Si la fórmula entera, tratada según los procedimientos utilizados para el sistema proposicional, tiene en todas las asignaciones (en por lo menos una asignación) el valor *0*, entonces es válida (satisfactible) para el universo del discurso vacío. Si, además, la fórmula es generalmente cuantificacionalmente válida, entonces es válida en todos los universos incluyendo el vacío.

Los otros sistemas básicos de funciones mencionados son E 0 y Max 0. Ellos son idénticos y el primero de sus dos teoremas-claves es:

$$(x)\ Fx \supset \sim (Ex)Fx$$

Del segundo teorema-clave, que indicaremos más adelante, se deduce el teorema "$(x)\ Fx$" que afirma que todas las fórmulas universalmente cuantificadas son teoremas de estos sistemas, afirmación acorde desde todo punto con el criterio de validez para el universo vacío.

Si agregamos a los sistemas Min 1 y Min 0 el axioma:

$$(Ex)\ Fx \supset (x)\ Fx$$

el primer sistema quedaría limitado a los universos con exactamente un elemento y el segundo a los universos con a lo sumo un elemento. Este axioma es, como se verá, el segundo teorema-clave de los sistemas E 1 y Max 1. El primer teorema-clave de estos dos sistemas no puede ser formulado en los sistemas básicos de funciones y por esta razón E 1 y Max 1 pertenecen a los sistemas superiores de funciones.

Existe entre todos los sistemas antes indicados cierto paralelismo, que se presentará aún más pronunciado entre los sistemas superiores de funciones correspondientes. Se podría pensar, sin embargo, en axiomatizaciones que no conserven este paralelismo *.

Es en los sistemas superiores de funciones donde se encuentra una generalización y una sistematización de lo tratado arriba. Antes de entrar en detalles debe señalarse que en cada uno de estos sistemas se presentan siempre, automáticamente, diferentes universos del discurso, a saber: el universo de los individuos, el universo de las funciones uniposicionales (clases) de primer orden, el universo de las funciones uniposicionales de segundo orden, etc. ** Todos estos universos de orden superior dependen del universo de los individuos. Si éste tiene n elementos, el universo de las funciones uniposicionales de primer orden tiene 2^n elementos, etc. Convenimos en remitirnos siempre al universo de los individuos por el cual los otros universos nos están dados. Por ejemplo "válido en un universo de 3 elementos" significa "válido en un universo de 3 individuos, en un universo de 8 funciones uniposicionales de primer orden, etc.".

De los metateoremas para los sistemas básicos de funciones nos queda solamente el primero, que afirma que la validez (satisfactibilidad) es la misma en los universos con igual número de elementos, mientras que, como es fácil ver, el metateorema de Loewenheim y sus consecuencias no rigen para los sistemas superiores.

* Existen, por ejemplo, axiomatizaciones para un sistema concerniente a los universos que tienen por lo menos 0 elementos, las que dan a este sistema una estructura diferente de Min 0.

** Nos limitamos a indicar lo relativo a funciones uniposicionales; hay algo correspondiente para las funciones biposicionales, etc., de los diferentes tipos.

A veces se habla *del* sistema superior de funciones, en singular, y en este caso se hace referencia al sistema superior de funciones Min 1, para el cual el universo de los individuos tiene por lo menos un elemento.

Considerando ahora la variedad de sistemas superiores posibles distinguiremos tres clases de sistemas: los sistemas Min n, para universos que tienen por lo menos n elementos; los sistemas E n, para universos con exactamente n elementos, y los sistemas Max n, para universos con a lo sumo n elementos, pudiendo ser n un número natural cualquiera *.

El primero (y a veces el único) teorema-clave de todos estos sistemas es:

$$(x)Fx \supset (E \underset{n}{Q}\, x)Fx$$

donde "Q" representa, según el sistema respectivo, "Min", "E" o "Max". En el sistema Max 3, por ejemplo, tenemos:

$$(x)Fx \supset (E \underset{3}{\mathrm{Max}}\, x)Fx$$

Suponemos que el lector conoce las definiciones de las expresiones "$(E \underset{n}{Q}\, x)Fx$", a excepción de $n = 0$. En este último caso definimos:

$(E \underset{0}{\mathrm{Min}}\, x)Fx =_{df} (Ex)Fx \lor \sim (Ex)Fx$

$(E \underset{0}{\mathrm{Max}}\, x)Fx =_{df} \sim (Ex)Fx$ (la negación de "$(E \underset{1}{\mathrm{Min}}\, x)Fx$")

$(E \underset{0}{\mathrm{E}}\, x)Fx =_{df} \sim (Ex)Fx$ (idéntico a "$(E \underset{0}{\mathrm{Max}}\, x)Fx$"; es la conjunción de "$(E \underset{0}{\mathrm{Max}}\, x)Fx$" y "$(E \underset{0}{\mathrm{Min}}\, x)Fx$").

El primer teorema-clave general se presenta en los sistemas Min 1, Min 0, E 0 y Max 0 como los teoremas claves respectivos ya indicados para los sistemas básicos.

Hay un segundo teorema-clave para los sistemas E n y Max n que puede ser derivado de dos axiomas de la forma:

* Se puede extender (con modificaciones) las definiciones y resultados siguientes a los n transfinitos. A la introducción del "axioma de la infinitud", corresponde la transicción del sistema Min 1 al sistema Min $\aleph_0$.

$$(E \underset{n}{\mathrm{Min}}\, x)Fx \supset (E \underset{n}{\mathrm{E}}\, x)Fx$$

$$(E \underset{n}{\mathrm{E}}\, x)Fx \supset (x)Fx$$

y que es:

$$(E \underset{n}{\mathrm{Min}}\, x)Fx \supset (x)Fx$$

De este segundo teorema-clave general obtenemos para Max 0 y E 0:

$$(Ex)Fx \lor \sim (Ex)Fx \,.\supset.\, (x)Fx$$

y, puesto que el implicante es un teorema, llegamos a:

$$(x)Fx$$

teorema importante, ya indicado.

Para los sistemas Max 1 y E 1 tenemos el segundo teorema-clave siguiente:

$$(Ex)Fx \supset (x)Fx$$

que igualmente ya fué indicado.

Para E 1 podría deducirse de sus dos teoremas-claves que las expresiones con cuantificador existencial son equivalentes a las expresiones correspondientes con cuantificador universal, consecuencia característica de este sistema.

Se podría intentar demostrar que todas las fórmulas cuantificacionalmente válidas en un universo con n elementos son teoremas E n y viceversa. Debido al metateorema de Goedel que establece la incompletitud del sistema superior, esta demostración no será posible para n transfinito. Pero si sólo tomamos en cuenta las expresiones del sistema básico de funciones entonces, gracias a la completitud de este sistema, se puede demostrar que todas las fórmulas válidas en un universo con n elementos son teoremas de E n.

Comparando los diversos universos del discurso y ciertos sistemas correspondientes hemos mostrado el paralelismo que existe entre los diversos sistemas indicados cuya representación general ha sido "Min n", "E n", y "Max n" y que se caracterizan por uno o dos "teoremas-claves". De esta manera se logra mejor tratar formalmente los universos del discurso y poner cada uno en correlación con un sistema. A la posibilidad de elegir uno o algunos universos corresponde la posibilidad de elegir uno de estos sistemas. Correlaciones entre fórmulas válidas y teoremas pueden así examinarse para todo universo determinado. Todos estos sistemas, aunque no tengan una aplicación comparable a la de Min 1, permiten alcanzar una visión más amplia de la lógica cuantificacional.

BIBLIOGRAFIA:

HILBERT, D. y ACKERMANN, W.: *Principles of Mathematical Logic,* Nueva York, 1950.

KLEENE, S. C.: *Introduction to Metamathematics,* Amsterdam –Groningen– Nueva York, 1952.

QUINE, W. V.: *Quantification and the Empty Damain,* J. S. L. Vol. 19, Nº 3, septiembre 1954.