ESTUDIOS SOBRE PUENTES DE MADERA

CON UN ENSAYO PRÉVIO DE CLASIFICACION DE LAS CARGAS RODANTES PARA LAS VÍAS CARRETERAS DE CHILE

(Continuacion)

De los puentes de madera

39. *Introduccion.*—Todos los estudios que siguen se aplican a cargas rodantes de 8 toneladas i a puentes de 5 metros de ancho libre entre las barandas. La vía carretera tendrá 3 metros 80 centímetros de ancho i será limitada por dos guarda-ruedas. El tablonaje inferior cubrirá todo el ancho del puente, i al tablonaje superior se le pondrá solamente sobre la vía carretera.

En Europa, se emplean a veces tres tablonajes i en este caso los tablones superiores no tienen mas que 2 a 3 centímetros de espesor. Son de madera blanda, i se renuevan con frecuencia. En Chile, los tablones son de madera de roble, i muchas veces de raulí. El tablonaje inferior tiene jeneralmente $0,^{m}075$ ó $0,^{m}10$ de espesor, el tablonaje superior $0,^{m}04$ ó $0,^{m}05$. Como los tablones inferiores contribuyen principalmente a la resistencia, hai ventaja en darles las mayores dimensiones usuales del comercio. El espesor práctico es 0.10 metro. Es lo que admitiremos siempre. Los tablones superiores que solo cubren la vía carretera tendrán 3 80 metros de largo i 0.05 metro de espesor. Para carretas de 8 toneladas, una distancia de 1.20 metro de eje a eje de las vigas, debe considerarse como un máximum, con un doble tablonaje de 0.10 metro i 0.05 metro.

CAPÍTULO II

Puentes de pequeña lonjitud

40. Cuando los puentes son de pequeña luz, basta formarlos con una série de vigas lonjitudinales sobre las cuales se clava un doble tablonaje de 0,m10 i 0,m05. Se colocarán estas vigas a una distancia de 1,m20 a 1,m25 de eje a eje. Determinemos la mayor luz que podremos dar a las vigas usuales del comercio.

Supondremos que las piezas descansen sobre dos apoyos que correspondan al eje trasversal de las áreas de apoyo de las vigas. Será útil dar a lo ménos 0.20 metro de lonjitud al apoyo. En efecto, si la viga tiene una seccion de 0.20 × 0.20, el área de apoyo será 20 × 20 = 400 centímetros cuadrados. En el caso de que una rueda de 4,000 kilógramos pasa sobre el apoyo, la presion será de $\frac{4000}{400} = 10$ kilógramos por centímetro cuadrado, lo que representa un límite conveniente en el caso de albañilería. Admitiremos, pues, que las vigas descansan sobre los estribos por lo ménos en una lonjitud de 20 centímetros.

El cálculo de las vigas es elemental. Para un tramo cuya lonjitud fuera L, se deducirá el taso de trabajo $\frac{T}{S}$ de la ecuacion

$$\frac{T}{S}\frac{I}{V} = \tfrac{1}{4}PL + \tfrac{1}{8}pL^2$$

$\frac{I}{V}$ = módulo de flexion de la viga.

P = peso de una rueda = 4,000 kilógramos.

p = carga uniforme por metro corrido, que proviene del peso muerto.

El cuadro que sigue indica las luces que se pueden salvar con las vigas correspondientes del comercio.

CUADRO NÚM. 18

SECCION	$\frac{I}{V}$	Luz	Tramo	P	p	MOMENTOS			Trabajo
						¼PL	⅛pL²	Total	p. cm.²
cm.	cm.³	m.	m.	k	k	km.	km.	km.	kg.
20 × 20	1333	0,70	0,90	4000	198	900	20	920	69
20 × 25	2083	1,20	1,40	"	207	1400	51	1451	69,6
25 × 25	2604	1,50	1,70	"	218	1700	79	1779	68,3
20 × 30	3000	1,80	2,00	"	216	2000	108	2108	70,2
25 × 30	3750	2,30	2,50	"	230	2500	180	2680	71,4
30 × 30	4500	2,70	3,00	"	243	3000	273	3273	72,7
30 × 35	6125	3,50	3,80	"	256	3800	462	4262	69,5
35 × 35	7140	4,20	4,50	"	272	4500	689	5189	72,6
35 × 40	9328	4,70	5,00	"	295	5000	922	5922	63,5

Sin embargo, las vigas de 30 × 35, 35 × 35 i 35 × 40 no se encuentran en el comercio tan comunmente como las demas. Por este motivo cuando el tramo es un poco grande, conviene mas emplear vigas de menor escuadría sostenidas por medio de torna-puntas.

CAPÍTULO III

Vigas de seccion constante, con torna-puntas

§ 1.—TRAMO DE CINCO METROS

41. Estudiemos la resistencia de un puente de cinco metros de luz, compuesto de cinco vigas bajo la vía. Tomamos vigas de 20 × 30 centímetros con torna-puntas de 20 × 20 inclinadas

en 45°, que sirven para sostener la viga a $\frac{1}{4}$ de la luz desde cada estremo, (Lam. IV).

Estando colocadas las vigas a una distancia de 1.25 metros de eje a eje, el peso muerto por metro corrido de viga intermedia comprenderá:

1.°	Tablonaje $0^m,15 \times 1^m,25 \times 1^m, \times 900$ kgs.=	169 kgs.
2.°	Vigas de $0^m,20 \times 0^m,30 \times 1^m \times 900$ kgs.=	54 "
3.°	Clavos i pernos	7 "
4.°	Para tierra i humedad	20 "
	Peso muerto por metro corrido de viga.	250 kgs.

La sobrecarga móvil será una rueda de 4 toneladas que moveremos sobre la viga de tal manera que para cada pieza se realiza el estado de solicitacion mas desfavorable.

42. *Peso muerto.*—Aunque el peso muerto sea de poca importancia, examinaremos sin embargo la cuestion con todo detalle, para mostrar de qué manera se trata el problema en el caso de una carga uniformemente repartida.

Ecuaciones.—Sea P la reaccion en A i B (Lam. IV, figura 1), i Q la reaccion de las torna-puntas en C i D. Tendremos

$$2\ P + 2\ Q \cos \alpha = 250 \text{ kgs.} \times 5 = 1.250 \text{ kgs.}$$

o

$$P + Q \cos \alpha = 625 \text{ kgs.} \qquad (1)$$

En esta ecuacion entran dos incógnitas: P. i Q. Como la sola estática no basta para resolver el problema, tendremos que hacer uso de las deformaciones elásticas del sistema.

Designemos por f la flecha de la viga en los puntos C i D; se ve que el acortamiento de la torna-punta será:

$$f \cos \alpha$$

Si σ es la lonjitud inicial de la torna-punta, tendremos segun la fórmula conocida de las deformaciones de las piezas comprimidas:

$$Q = E_1\ \omega_1 \frac{f \cos \alpha}{\sigma} \qquad (2)$$

E_1 = coeficiente de elasticidad de la madera.

ω_1 = seccion trasversal de la torna-punta.

Por fin, tendremos una tercera ecuacion considerando las deformaciones de la pieza AB, apoyada por sus estremos A i B, i solicitada por las fuerzas siguientes:

1.° La carga uniforme de 250 kilógramos por metro corrido; i 2.° las reacciones verticales $Q \cos \alpha = R$ de las torna-puntas aplicadas en C i D.

La ecuacion que da la flecha en C i D tendrá la forma:

$$f = \phi\,(P,\, Q \cos \alpha) \tag{3}$$

Tenemos pues 3 ecuaciones que nos permiten determinar las 3 incógnitas f, P i Q.

Ocupémonos en primer lugar de la ecuacion (3).

Sean:

f_p = la flecha en C debida a la carga uniforme $p = 250$ kgs.

$f_{Q \cos \alpha}$ = la flecha en C debida a las dos fuerzas $Q \cos \alpha = R$ aplicadas en C i D.

Tendremos evidentemente la ecuacion

$$f = f_p - f_{Q \cos \alpha} \tag{4}$$

1.° Determinacion de f_p. El valor de f_p es:

$$f_p = \frac{p(a\,b\,l^2 + a^2 b^2)}{24\,E\,I} \tag{5}$$

En esta ecuacion tenemos, espresando todo en centímetros:

$$p = 2,^{k}5 \quad a = A\,C = 125 \quad b = c\,B = 375 \quad l = A\,B = 500$$
$$E = 100000 \qquad I = 45000$$

Resultando:

$$f_p = \frac{2,5\,(125 \times 375 \times 500^2 + 125^2 \times 375^2)}{24 \times 100000 \times 45000} = 0,^{cm}3221 \tag{5'}$$

2.° Determinacion de $f_{Q \cos \alpha}$. La determinacion de $f_{Q \cos \alpha}$ es mas compleja. Se puede tratar la cuestion por el cálculo o por los métodos gráficos.

a) *Método analítico.*—He aquí la marcha que conviene seguir:

Siendo prismática la pieza i simétrico el estado de solicitacion, los cuartos estremos de la pieza tendrán una flexion parabólica, miéntras que la parte $C D$ comprendida entre las dos torna-puntas presentará una flexion circular. El radio ρ del arco de circulacion será:

$$\rho = \frac{E I}{P \times c}$$

Si el oríjen de las coordenadas es o (Lám. IV, fig. 2) tendremos en todo el largo del arco de círculo

$$x^2 + y^2 = 2 \rho y = \frac{2 E I}{P \times c} y \tag{6}$$

En los estremos tendremos

$$\epsilon \frac{d^2 y}{d x^2} = P (\tfrac{1}{2} L - x)$$

aplicable desde $x = \frac{1}{2} l$ hasta $x = \frac{1}{2} L$

Integrando dos veces tendremos

$$\epsilon y = \phi (x) \tag{7}$$

Esta ecuacion contiene dos constantes que pueden determinarse por la doble condicion que para $x = \frac{1}{2} L$ tenemos $y = f$ i $\frac{d y}{d x} = \frac{\frac{1}{2} L}{\rho - f}$

Las constantes calculadas, bastará hacer $x = \frac{1}{2} l$ en la fórmula (7) para tener y sobre el apoyo, es decir la flecha f_m en el medio de la viga. Ademas, tomando $x = \frac{1}{2} L$ en la ecuacion (6), tendremos $y = f_D$ = flecha del arco de círculo, es decir, el descenso del punto medio de la viga en relacion a D. Por fin, la flecha en D debida a las dos fuerzas aisladas será

$$f_{Q \cos \alpha} = f_m - f_D$$

Se ve que este método es mui laborioso. Es preferible resolver la cuestion por medio de la Estática Gráfica que da una solucion a la vez mas elegante i mas rápida.

b) *Método gráfico.*—La cuestion es determinar la flecha en C i D que presentará una pieza de 20×30 centímetros, colocada sobre dos apoyos de nivel, distantes de 5 metros, i solicitada por dos fuerzas aisladas $Q \cos \alpha = R$ aplicadas en C i D.

Se sabe que la fibra deformada de una viga prismática solicitada por flexion es el lugar de los momentos, construido considerando la pieza como encorvada por una carga contínua que tuviera la forma del área de los momentos de flexion, i adoptando como distancia polar una lonjitud igual a $E\,I$.

Se divide el área de los momentos en un cierto número de elementos cuyas áreas se concentran en sus centros de gravedad. El lugar de los momentos que corresponde a las fuerzas aisladas obtenidas así, será tanjente a la fibra deformada en los puntos de separacion de los elementos.

Los momentos en C i D tienen por valor $1{,}25\ R$. (Lámina III, figura 1). Las áreas de los momentos serán:

$$A\,C\,E = D\,F\,B = \tfrac{1}{2} \times \overline{1{,}25}^2\ R$$

$$C\,D\,F\,E = 2 \times \overline{1{,}25}^2\ R$$

La viga lonjitudinal es una pieza de 20×30; tendrá, pues, un momento de inercia

$$I = \tfrac{1}{12} \times 20 \times \overline{30}^3 = 45000 \text{ cm.}^4 = 0{,}^{m4}00045$$

Síguese que la distancia polar será:

$$E\,I = 10^9 \times 0{,}^{m4}00045 = 450000$$

Tomaremos como escala de $E\,I$: $\dfrac{1}{10000000}$

La distancia polar será pues: $\dfrac{450000}{10000000} = 0{,}^{m}045$

Como escala de las áreas de los M tomaremos $\dfrac{1}{50\,R}$. Resultando que los triángulos $A\ C\ E$ i $D\ F\ B$ quedarán representados por la lonjitud

$$\frac{\frac{1}{2} \times \overline{1{,}25}^2 R}{50\ R} = 0{,}^{m}015625$$

i el rectángulo $C\ D\ E\ F$ por la lonjitud

$$\frac{2 \times \overline{1{,}25}^2\ R}{50\ R} = 0{,}^{m}0625$$

La escala de las absisas es $\frac{1}{50}$

La escala de las deformaciones será pues

$$\frac{10000000}{50 \times 50\ R} = \frac{4000}{R}$$

Hemos construido (Lám. III, fig. 2) el diagrama de las fuerzas proporcionales a las áreas de los momentos con una distancia polar EI=0,045 metro. Despues hemos trazado (fig. 3) el lugar de los momentos que se refiere a éste, i que da las deformaciones verticales en las líneas de separacion de las áreas parciales de los momentos.

La deformacion en C i D será, pues, Cb (fig. 3) o a la escala:

$$f_{Q \cos\alpha} = C\,b \times \frac{R}{4000} = \frac{2^{cm.},3}{4000} R = 0^{cm},000575\ R \qquad (8)$$

Se ve que esta solucion es mucho mas elegante i mas práctica que la que resulta del cálculo.

Resolucion de las ecuaciones. — Hemos visto anteriormente (relacion 5′) que la deformacion en C, debida a la carga uniforme es

$$f_p = 0^{cm},3221$$

Reemplazando en la fórmula (4), tendremos

$$f = 0{,}3221 - 0{,}000575\ Q \cos\alpha \qquad (9)$$

que es la forma definitiva de la ecuacion (3).

El sistema de las 3 ecuaciones que hai que resolver será pues:

$$P + Q \cos \alpha = 625^{k} \qquad (1)$$

$$Q = E_1 \, \omega_1 \frac{f \cos \alpha}{\sigma} \qquad (2)$$

$$f = 0{,}3221 - 0{,}000575 \; Q \cos \alpha \qquad (9)$$

Para la ecuacion (2), tenemos:
$E_1 = 100000$ en cm.^{2}.
ω_1 = seccion de la torna-punta $= 20 \times 20 = 400$ cm.^{2}
cos α = *cos* $45^{\circ} = 0{,}707$.
σ = lonjitud de la torna-punta = 180 cm.
Ademas, reemplazando f por su valor espresado por (9), la ecuacion (2) será:

$$Q = 100000 \times 400 \frac{0{,}3221 - 0{,}000575 \times 0{,}707 \; Q}{180} 0{,}707$$

$$180 \; Q = \begin{cases} 100000 \times 400 \times 0{,}3221 \times 0{,}707 \\ - 100000 \times 400 \times 0{,}000575 \times \overline{0{,}707}^{2} \; Q \end{cases}$$

$$180 \; Q + 11496{,}5 \; Q = 9108988$$

$$Q = \frac{9108988}{11676{,}5} = 780 \text{ kgs.}$$

$$Q \cos \alpha = R = 780 \times 0{,}707 = \text{kgs. } 551{,}46$$

Por fin, segun la ecuacion (1), tendremos

$$P = 625 - 551{,}46 = \text{kgs. } 73{,}54$$

El estado de solicitacion del sistema queda pues, completamente conocido.

Momentos.—El momento en C o D será:

$$M_c = \tfrac{1}{2} \, 250 \times 1{,}25^2 - 73{,}54 \times 1{,}25 = 103^{\text{kg,m}}39$$

El momento en el medio de la viga será:

$$M_m = \tfrac{1}{8} \, 250^{k} \times 5^2 - 73^{k}{,}54 \times 2{,}5 - 551^{k}{,}46 \times 1{,}25$$

$$M_m = -92 \text{ kg. m.}$$

43. *Carga rodante.—Ecuaciones.*—Ocupémonos en primer lugar de la viga lonjitudinal. Pondremos la rueda de 4 toneladas en el medio del tramo. Esta carga produce sobre las tornapuntas una compresion Q, a la cual corresponde una reaccion vertical Q *cos* a.

Tendremos el sistema de 3 ecuaciones:

$$P + Q \cos \alpha = 2000 \text{ kgs.} \tag{1'}$$

$$Q = E_1\, \omega_1 \frac{f \cos \alpha}{\sigma} \tag{2}$$

$$f = \phi\,(P, Q \cos \alpha) \tag{3}$$

Sean:

f_{4000} = flecha en C producida por una carga de 4000 kilógramos colocada en la mitad del tramo, estando la viga apoyada en sus dos estremos.

$f_{Q \cos \alpha}$ = flecha en C producida por las fuerzas Q *cos* α aplicadas en C. i D.

Tendremos

$$f = f_{4000} - f_{Q \cos \alpha} \tag{10}$$

1.º *Determinacion gráfica de* f_{4000}.—Hemos hecho el trazado (Lámina III, fig. 4, 5 i 6) de la libra deformada que corresponde a la carga de 4000 kg.

Las escalas son las siguientes:

Escala de $E\,I = \dfrac{1}{10000000}$ $\qquad E\,I = \dfrac{0{,}00045 \times 10^9}{10{,}000{,}000} = 0^{\text{m}}{,}045$

Escala de las áreas de los momentos $\dfrac{1}{200000}$, es decir

1000 kgm². representadas por $\dfrac{100}{200000} = 0^{\text{m}}{,}005$

Escala de las lonjitudes: $\dfrac{1}{50}$

La escala de las deformaciones será pues:

$$\frac{10000000}{50 \times 200000} = 1$$

es decir que obtendremos las deformaciones en su verdadera magnitud. Ademas corresponderán a su verdadero valor en los puntos de separacion de las áreas de los momentos, es decir en C i D.

El depurado muestra que tenemos

$$f_{1000} = 1,^{\text{cm}}55$$

2.° *Determinacion de* $f_{Q\cos\alpha}$.—Como la reaccion vertical de las torna-puntas vale Q cos α, sabemos, segun un depurado anterior, (ecuacion 8) que

$$f_{Q\cos\alpha} = 0,^{\text{cm}}000575\ Q\cos\alpha$$

Tenemos, pues, segun la ecuacion (10)

$$f = 1,^{\text{cm}}55 - 0,000575\ Q\cos\alpha$$

que es la forma definitiva de la ecuacion (3).

Resolucion de las ecuaciones.—Haciendo en la ecuacion (2) las sustituciones del caso, tendremos

$$Q = 100000 \times 400\ \frac{1,55 - 0,000575 \times 0,707 \times Q}{180} 0,707$$

$$(180 + 11496,5) Q = 43834000$$

$$Q = \frac{43834000}{11676,5} = 3754 \text{ kgs.}$$

i

$$Q\cos\alpha = R = 3754 \times 0,707 = 2654 \text{ kgs.}$$

Segun la ecuacion (1′), tendremos pues:

$$P = 2000 - 2654 = -654 \text{ kilógramos.}$$

El peso muerto produce sobre los apoyos una presion de $73,^{\text{k}}54$, resultando que bajo la accion de la carreta las estremidades de las vigas tienden a levantarse con una fuerza de

$$654^{\text{k}} - 73,^{\text{k}}54 = 580,^{\text{k}}46$$

Será pues necesario fijar las estremidades de las vigas por medio de pernos.

Dimensiones trasversales.—Bajo la accion de la carreta, el momento en el medio de la viga será:

$$M_m = +654 \times 2{,}50 - 2654 \times 1{,}25 = 1635 - 3317{,}5 = -1682{,}^{kg.\,m}5$$

Por otra parte, el momento debido al peso muerto en el mismo punto es -92 kilógrametros.

El momento máximo total correspondiente será por consiguiente:

$$M_{max} = -1682{,}^{kg.\,m}5 - 92^{kg.\,m} = -1774{,}^{kg.\,m}5$$

i el trabajo máximum de la viga,

$$\frac{T}{S} = \frac{M_{max}}{\frac{I}{V}} = \frac{177450}{3000} = 59{,}^{k}15 \text{ por cm.}^2$$

Nos encontramos, pues, en buenas condiciones de resistencia.

44. *Torna-puntas.*—Para estas piezas el estado de solicitacion mas desfavorable corresponde al instante en que la rueda de 4 toneladas se encuentra en C o D. Esta carga de 4 toneladas dará a la torna-punta una compresion Q que produce una reaccion vertical $Q \cos \alpha$. Bajo la accion de una fuerza aislada P una pieza prismática sobre dos apoyos toma en el punto de aplicacion de la fuerza, una flecha

$$f = \frac{a^2\, b^2}{3\, E\, I\, L} P = \alpha \times P \tag{11}$$

Siendo a i b las distancias de la fuerza a los dos apoyos de la pieza, i L la distancia entre los dos apoyos. En el caso actual, tendremos:

$$a = 125 \text{ cm.} \quad b = 375 \text{ cm.} \quad L = 500 \text{ cm.} \quad E = 100{,}000 \text{ cm.}^2$$
$$I = 45000 \text{ cm.}^4 \text{ Resultando:}$$

$$\alpha = \frac{15625 \times 140625}{3 \times 100000 \times 45000 \times 500} = 0{,}^{cm}000325$$

Bajo la accion de las dos fuerzas 4,000 kilógramos i $Q \cos \alpha$ de direccion contraria i aplicadas en el mismo punto, la viga toma pues una flecha

$$f' = (4000 - Q \cos \alpha)\, 0,^{cm}000325$$

Ademas, bajo la accion de Q la torna-punta se acortará de $f' \cos \alpha$. Tendremos:

$$Q = E_1\, \omega_1 \frac{f' \cos \alpha}{\sigma}$$

o

$$Q = 100000 \times 400 \frac{(4000 - Q \times 0{,}707) 0{,}000325}{180} 0{,}707$$

resultando

$$Q = 5352 \text{ kgs.}$$

i

$$Q \cos \alpha = 5352 \times 0{,}707 = 3784 \text{ kgs.}$$

La compresion Q debida al peso muerto es 780 kilógramos. Tendremos, por consiguiente, una compresion total máxima:

$$Q_{max} = 5352 + 780 = 6132 \text{ kgs.}$$

El coeficiente de trabajo de la torna-punta será

$$\frac{6132}{400} = 15,^{kg}3 \text{ por cm.}^2$$

El limite superior admisible es:

$$\frac{70^{k}}{1 + 0{,}006\, r^2} = \frac{70}{1 + 0{,}006 \times 81} = 47^{kg} \text{ mas o ménos; } r = \frac{180}{20} = 9$$

Se ve, pues, que las torna-puntas trabajan a un taso mui poco alzado. Pero conviene que las cosas sean así. Como son piezas cortas, un aumento de seccion no dará un gran aumento de volúmen, miéntras que las deformaciones disminuyen aproximándose mas así a una pieza sobre 4 apoyos de nivel. Por otro lado, para obtener un buen ensamble de la viga i de la torna-punta, conviene que se dé el mismo ancho a ámbas piezas.

45. *Métodos aproximativos.*—Mui a menudo se estudian las

vigas con torna-puntas como si fueran piezas sobre 4 apoyos de nivel. A veces tambien se supone la pieza cortada en los apoyos intermediarios C i D. Vamos a examinar hasta qué punto estos métodos son exactos, aplicándolos al caso que precede.

1.° *Cálculo por el método de las piezas contínuas sobre 4 apoyos de nivel.*

a) *Peso muerto.*—Ocupémonos, en primer lugar, del peso muerto. Tenemos $p = 250$ kilógramos por metro corrido.

El momento sobre los apoyos médios se obtiene por la la fórmula

$$M_c = \tfrac{1}{2}\frac{1+\theta^3}{3+2\theta}\tfrac{1}{8}\, p\, L^2$$

Tenemos

$$p = 250^{k} \qquad L = 2^{m},50 \qquad \theta = \frac{l}{L} = \frac{1,25}{2,50} = 0.5$$

i por consiguiente

$$M_c = 0,5625 \times \tfrac{1}{8} 250 \times 2,5^2 = 109^{kg.\,m},85$$

El momento en el medio del tramo será:

$$M_m = \tfrac{1}{8} 250 \times 2,5^2 - M_c = 195,3 - 109,85 = 85^{kg.\,m},45.$$

b). *Carga rodante.*—Colocando una rueda de 4 toneladas en el medio del tramo central, habrá que determinar las reacciones sobre los dos apoyos del centro. Se deducirán inmediatamente de éstas las reacciones sobre los apoyos estremos. Como éstos quedan invariables, el problema será el siguiente:

¿Cuál es la reacccion R_1 que tiene que producir la torna-punta para que la viga no sufra ninguna flecha en C o D?

Hemos visto anteriormente que bajo la accion de la carga de 4 toneladas puesta en el medio del tramo, la viga baja de $1^{cm},55$ en los puntos C i D. Bajo la accion de dos fuerzas R_1 dirijidas de abajo hácia arriba i aplicadas en los puntos C i D, la viga se levanta [ecuacion (8)] en

$$0^{cm},000575\ R_1$$

Para que la flecha sea nul, debemos pues tener

$$\Sigma f = o$$

es decir

$$o^{cm},000575\ R_1 = 1^{cm},55$$

Resultando

$$R_1 = \frac{1,55}{0,000575} = 2695 \text{ k.}$$

Comparacion con el método de las deformaciones.—Tratando la cuestion por el método de las deformaciones, hemos hallado

$$Q \cos \alpha = R = 2654 \text{ k}$$

Se ve pues que los dos métodos dan resultados casi iguales. La diferencia será tanto menor cuanto mas reducido sea el taso de trabajo de las torna-puntas.

Como tenemos $R_1 = 2695$ kilógramos, resultará como esfuerzo sobre los apoyos estremos

$$2000 - 2695 = -695 \text{ k}$$

El momento en la mitad del tramo central será:

$$M = 695 \times 2.5 - 2695 \times 1,25 =$$
$$= 1735,5 - 3368,75 = -\text{kg. m. } 1631,25$$

i el momento máximo total en el mismo punto:

$$M_{max} = -1631,25 - 85,5 = -\text{kg. m. } 1716,75$$

El error en el caso que nos ocupa, asemejando la viga a una pieza sobre 4 apoyos de nivel será pues:

$$\frac{1716,75 - 1774.50}{1774.50} = -3,25 \text{ p. } \%, \text{ en ménos.}$$

2.º *Viga discontínua en C i D.*—Suponiendo la viga discontínua en C i D, tendremos en la mitad del tramo central:

a) para el peso muerto

$$M = \tfrac{1}{8}\ 250 \times 2,5^2 = 195^{kg.\,m},3$$

b) para la carga rodante

$$M = \tfrac{1}{4}\, 4000 \times 2{,}5 = 2500 \text{ kg. m.}$$

El momento máximo total será:

$$M_{max} = 2500 + 195{,}3 = 2695{,}^{\text{kg. m}}3$$

El error será pues:

$$\frac{2695.3 - 1774{,}3}{1774{,}3} = 52\% \text{ mas o menos, en mas.}$$

Se desprende de ahí que conviene abandonar del todo este método, espeditivo, por cierto, pero que induce a dar a las piezas dimensiones sumamente exajeradas.

---

§ 2.—Tramo de ocho metros

Consideremos el caso de una viga de 30 × 30 centímetros de 8 metros de largo, sostenida por 2 torna-puntas de 20 × 30, a 2 metros de sus estremos. Admitamos 5 vigas bajo la vía, distantes de 1.25 metro de eje a eje. El caso es análogo al anterior. Sin embargo, lo estudiaremos con todo detalle, porque nos dará la ocasion de desarrollar otro método de cálculo, i de deducir del exámen comparativo algunas conclusiones útiles para el cálculo de los puentes de este sistema.

46. *Método de las deformaciones.*—Como en el caso anterior, hemos trazado el depurado de la fibra deformada (Lámina III, figuras 7, 8 i 9):

1.° Bajo la accion de la carga de 4 toneladas colocada en la mitad del tramo, i que da una flecha = 4 centímetros, 3 en los puntos C i D.

2.° Bajo la accion de dos fuerzas $R = Q \cos \alpha$ aplicadas en C i D, i que dan en estos puntos una flecha

$$f_R = 0{,}0016\, Q \cos \alpha$$

Nos abstendremos de dar mas detalles en cuanto al trazado del depurado, porque las construcciones son análogas a las del tramo de cinco metros. La lámina III indica las diferentes escalas que se han adoptado.

Examinemos separadamente el peso muerto i la carga rodante:

1.º *Peso muerto.*—El peso muerto por metro corrido de viga se compone:

Tablonaje: $0{,}15 \times 1{,}^{m}25 \times 1^{m} \times 900$ kgs	= 169	kgs.
Viga de $0{,}30 \times 0{,}30 \times 1^{m} \times 900$ kgs . .	" 81	"
Clavos i pernos	7	"
Tierra i humedad	18	"
Peso total por m. c. de viga. . . .	275	kgs.

La flecha obtenida por una carga uniforme se obtiene por la fórmula. (5)

$$f_p = \frac{p(a\,b\quad + a^2 b^2)}{24\,E\,I} \qquad (5)$$

$p = 2{,}75 \quad a = 200^{cm} \quad b = 600 \quad l = 800 \quad E = 100000 \quad I = 67500$

Por consiguiente

$$f_p = \frac{2{,}75\,(200 \times 600 \times 800^2 + 200^2 \times 600^2}{24 \times 100000 \times 67500} = 1^{cm},548$$

El sistema de ecuaciones que habrá que resolver será:

$$P + Q \cos \alpha = 275 \times 4 = 1100 \qquad (12)$$

$$Q = E_1\,\omega_1 \frac{f \cos \alpha}{\sigma} \qquad (13)$$

$$f = 1{,}548 - 0{,}0016\ Q \cos \alpha \qquad (14)$$

Despues de las substituciones, la ecuacion (13) toma la forma:

$$Q = 100000 \times 600 \frac{1{,}548 - 0{,}0016 \times 0{,}707\ Q}{285} 0{,}707$$

resultando

$$Q = 1352^{\,kg}$$

$$R = Q \cos \alpha = 1352 \times 0{,}707 = 956^{\,kg}$$

Segun la ecuacion (12)

$$P = 1100 - 956 = 144^{\text{kg}}$$

El momento tendrá por valor en C i D,

$$M_c = \tfrac{1}{2}\, 275 \times 2{,}00^2 - 144 \times 2 = 262^{\text{kgm}}$$

i en la mitad

$$M_m = \tfrac{1}{8}\, 275 \times 8^2 - 144 \times 4 - 956 \times 2 = -288^{\text{kgm}}$$

2.° *Carga rodante.*—Como en el caso anterior tenemos:

$$Q = 100000 \times 600 \frac{4,3 - 0{,}0016 \times 0{,}707\, Q}{285} 0{,}707$$

resultando

$$Q = 3778^{\text{k}},8$$

i

$$R = Q \cos \alpha = 3778{,}8 = 0{,}707 = 2670 \text{ k}$$

Pero tenemos la relacion

$$P + Q \cos \alpha = \text{k. } 2000$$

Por consiguiente

$$P = 2000 - 2670 = -670 \text{ k}$$

Síguese que los apoyos estremos A i B tienen una tendencia a solevantarse con un esfuerzo de k. 670.

3.° *Dimensiones trasversales.*—El momento en la mitad del tramo será:

$$M_m = 670 \times 4 - 2670 \times 2 = -2660 \text{ kgm.}$$

El momento máximo total será pues:

$$M_{max} = -2660 - 288 = -2948 \text{ kgm.}$$

produciendo un trabajo de

$$\frac{T}{S} = \frac{294800}{4500} = \text{kgs. } 65{,}5\ p.\ \text{cm.}^2$$

47. *Método de las piezas contínuas sobre 4 apoyos de nivel.*— Veamos a qué resultado llegaremos suponiendo que las tornapuntas obran como apoyos fijos. En lugar de tomar por base los resultados de los trazados gráficos, trataremos la cuestion enteramente por el cálculo.

Sea una pieza AB sobre varios apoyos (Lám. IV, fig. 3), solicitada por una fuerza cualquiera P situada a una distancia δL del apoyo A. Sean t, R_1, R_2, T las reacciones correspondientes en A, C, D, B. En el caso de una pieza apoyada por sus estremos i solicitada por una fuerza única P, la flecha y en cualquier punto F situado a una distancia $\theta\ L$ de A, se deduce de las fórmulas siguientes: (*)

desde A hasta E: $$E\,I\,y = -\frac{P\,L^3}{6}\,\theta(1-\delta)\left\{\theta^2+\delta\,(\delta-2)\right\} \quad (15)$$

desde E hasta B: $$E\,I\,y = -\frac{P\,L^3}{6}\,\theta\,(1-\theta)\left\{\delta^2+\theta\,(\theta-2)\right\} \quad (16)$$

Pongamos la carga de 4 toneladas en el punto medio del tramo, e introduzcamos las reacciones R_1 i R_2 de los apoyos intermedios C i D.

Calculemos las flechas orijinadas en los puntos C i D: 1.º por la carga de 4 todeladas; 2.º por las reacciones R_1 i R_2.

1.º Para la carga de 4 toneladas, tendremos:

$$\theta = 0{,}25 \quad \delta = 0{,}50 \quad P = \text{kgs. } 4000 \quad L = 8^{\text{m}}$$

$E = 10^9$ $I = 0{,}000675$, tomando el metro por unidad.

La fórmula (15) dará:

$$10^9 \times 0{,}000675\,y = -$$
$$\frac{4000 \times 512}{6}\,0{,}25(1-0{,}5)\left\{0{,}0625+0{,}5\,(0{,}5-2)\right\}$$
$$675000\,y = 29354638$$

resultando

$$y = 0^{\text{m}},0435 = 43^{\text{mm}},5 \quad (17)$$

(*) Véase Planat, *Mécanique appliquée à la Résistance des Matériaux*.

Recordaremos que por los métodos gráficos habíamos obtenido:

$$y=43 \text{ mm.}$$

2.° *a)*. La flecha y_1 que aparece en C bajo la accion de R_1 se calcula por la fórmula (15) suponiendo $\theta=\delta=0{,}25$. Dedúcese:

$$E\,I\,y_1=-\frac{R_1\times 512}{6}0{,}25(1-0{,}25)\left\{0{,}0625+0{,}25(0{,}25-2)\right\}$$

$$E\,I\,y_1=5{,}99\;R_1$$

b). Bajo la accion de $R_2=R_1$ aplicada en D la flecha y_2 en C se obtendrá tambien por la fórmula (15), suponiendo $\theta=0{,}25$ $\delta=0{,}75$.

Tendremos pues:

$$E\,I\,y_2=-\frac{R_1\times 512}{6}0{,}25\,(1-0{,}75)\left\{0{,}0625+0{,}75\,(0{,}75-2)\right\}$$

o

$$E\,I\,y_2=4{,}66\;R_1$$

Sumando:

$$E\,I\,(y_1+y_2)=(5{,}99+4{,}66)\;R_1=10{,}65\;R_1$$

Como

$$E\,I=10^9\times 0{,}000675=675000$$

tendremos

$$675000\;y=10{,}65\;R_1$$

o

$$y=0{,}00159\;R_1 \tag{18}$$

Por el método gráfico de las deformaciones habíamos obtenido:

$$y=0{,}0016\;R_1$$

Las dos flechas de las relaciones (17) i (18) son naturalmente de direccion opuesta; i, como por hipótesis los apoyos son de nivel, la suma queda nula; lo que procura la ecuacion de condicion.

$$0{,}00159\;R_1=0{,}0435$$

$$R_1=\frac{0{,}0435}{0{,}00159}=2735 \text{ k}$$

En seguida:

$$P = 2000 - 2735 = -735 \text{ kg.}$$

El momento en el punto medio del tramo debido a la carga rodante será:

$$M_m = 735 \times 4 - 2735 \times 2 = -2530 \text{ kg. m.}$$

Peso muerto.—El momento en el medio de la viga debido al peso muerto se calcula por la fórmula:

$$M'_m = -\left\{1 - \frac{2(1+\theta^3)}{3+2\ \theta}\right\} \tfrac{1}{8}\, p'\, l^2$$

o

$$M'_m = -0{,}5 \times \tfrac{1}{8}\ 275 \times 16 = -275 \text{ kgm.}$$

El momento máximo total será:

$$M_{max} = -2530 - 275 = -2805 \text{ kgm.}$$

La hipótesis de los apoyos de nivel dará pues un error en ménos de

$$\frac{2805 - 2938}{2938} = 4{,}\ 5\ \% \text{ mas o menos}$$

Viga discontínua en C i D.—Suponiendo la viga discontínua en C i D, obtendremos los momentos siguientes en el punto medio del tramo central

a) Peso muerto:

$$M' = \tfrac{1}{8} 275 \times 16 = 550 \text{ kgm.}$$

b) Carga rodante:

$$M'' = \tfrac{1}{4} 4000 \times 4 = 4000 \text{ kgm.}$$

El momento máximo total será:

$$M_{max} = \text{kgs. m. } 4{,}550$$

El error será, en mas:

$$\frac{4550-2938}{2938} = 54{,}8\ \% \text{ mas o ménos.}$$

lo que confirma la opinion que hemos emitido anteriormente

49. *Conclusion.*—En resúmen, vemos:

1.° Que no se puede calcular las vigas con torna-puntas, suponiendo la viga cortada sobre los apoyos intermedios sin esponerse a errores grandes, que acarrean un desembolso exajerado.

2.° Que el método aproximativo, fundado en la invariabilidad de los apoyos, da resultados un poco inferiores a la realidad, pero que se acercan mucho a las del método de las deformaciones, que es el único exacto.

---

§ 3.—MÉTODO PRÁCTICO PARA EL CÁLCULO DE LAS DIMENSIONES

50. El método gráfico aplicado a la indagacion de las deformaciones, seria por cierto preferible a los otros procedimientos, si en el caso actual, el método de las vigas contínuas sobre apoyos invariables no fuera susceptible de importantes simplificaciones, que permiten resolver la cuestion de una manera mui rápida i al mismo tiempo bastante exacta.

Vamos a demostrar que en el caso de una pieza sobre varios apoyos, las reacciones orijinadas sobre los apoyos por una carga P son independientes de la lonjitud absoluta del tramo, i no dependen sino de la razon de la abscisa del punto de aplicacion de la carga i de la lonjitud total de la pieza.

Demostracion.—La condicion de la incompresibilidad del apoyo es la igualdad de las flechas debidas por una parte a la carga i por otra parte a la reaccion de la torna-punta. Estas dos cantidades se deducen de la ecuacion (15) que toma la forma jeneral:

$$\epsilon\, y = P\, L^3 f\,(\theta, \delta)$$
$$\epsilon\, y_1 = R_1\, L^3 f'\,(\theta, \delta)$$

Como $y=y_1$, tenemos:

$$R_1\, L^3 f'(\theta, \delta) = P\, L^3 f(\theta, \delta)$$

Resultando

$$R_1 = P\frac{f(\theta, \delta)}{f'(\theta, \delta)} = \alpha \times P$$

lo que prueba que la espresion de R_1 es independiente de L, i solo es funcion de θ i de δ, lo que demuestra el teorema.

51. *Cálculo de los Coeficientes* α.—En vista de facilitar el cálculo de R_1, será útil determinar una vez por todas los valores de α que corresponden a las posiciones sucesivas de P.

Sea pues un puente de lonjitud L sostenido por torna-puntas puestas a la distancia $\theta\ L$ de los estremos. Llamemos Q las reacciones sobre los apoyos estremos (Lam. IV, fig. 4), i R las reacciones sobre los apoyos intermedios debidas a la carga P colocada en el punto medio del tramo central.

Conservando las notaciones anteriores, sabemos que las flechas producidas en C respectivamente por la carga P i por las reacciones R_1 i R_2 se deducen de las ecuaciones:

$$E\, I\, y = -\frac{P\, L^3}{6}\theta(1-\delta)\left\{\theta^2 + \delta(\delta - 2)\right\} = -\frac{P\, L^3}{6}\phi(\theta, \delta = 0{,}5) = -\frac{P\, L^3}{6}\phi_1(\theta, \delta)$$

$$E\, I\, y_1 = -\frac{R_1\, L^3}{6}\phi(\theta, \delta = \theta) = -\frac{R_1\, L^3}{6}\phi_2(\theta, \delta)$$

$$E\, I\, y_2 = -\frac{R_2\, L^3}{6}\phi(\theta,\ \delta = 1 - \theta) = -\frac{R_2\, L^3}{6}\phi_3(\theta, \delta)$$

Siendo el punto C invariable i notando que $R_2 = R_1$ i que

$$\Sigma f = 0$$

tendremos

$$\frac{P\, L^3}{6}\phi_1(\theta, \delta) = \frac{R_1\, L^3}{6}\left\{\phi_2(\theta, \delta) + \phi_3(\theta, \delta)\right\}$$

resultando

$$R_1 = \frac{\phi_1}{\phi_2 + \phi_3} P = a \times P$$

$$a = \frac{\phi_1}{\phi_2 + \phi_3} \tag{19}$$

$$\phi(\theta, \delta) = \theta(1 - \delta) \left\{ \theta^2 + \delta(\delta - 2) \right\} \tag{20}$$

Hemos calculado los valores de las funciones ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 por varios valores de θ comprendidas entre 0,20 i 0,50. Dado un valor de θ, estas funciones se calculan mui fácilmente, tomando respectivamente

$$\delta = 0{,}5 \quad \delta = \theta \quad \delta = 1 - \theta$$

segun que el caso se refiere a ϕ_1, ϕ_2, o ϕ_3. Ha sido mui sencillo calcular así los valores correspondientes de a. Hemos reunido los resultados en el cuadro siguiente. En la figura 5 de la lámina IV hemos hecho el trazado de la curva de a, para los varios valores de θ.

CUADRO NÚM. 19

θ	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
ϕ_1	0,071000	0,085937	0,099000	0,109812	0,118000	0,123287	0,125000
ϕ_2	0,051200	0,070312	0,088200	0,103512	0,115200	0,122512	0,125000
ϕ_3	0,036800	0,054687	0,073800	0.092487	0,108800	0,120487	0,125000
$\phi_2 + \phi_3$	0,088000	0,125000	0,162000	0,196000	0,224000	0,243000	0,250000
$a = \frac{\phi_1}{\phi_2 + \phi_3}$	0,8068	0,6875	0,6111	0,5603	0,5267	,5073	0,5000

Aplicaciones

52. *Tramo de 8 metros.*—Ahora los cálculos se harán con la mayor facilidad i rapidez. Ocupémonos del mismo caso estu-

diado anteriormente: un tramo de ocho metros con torna-puntas que sostienen la viga a dos metros de los estremos.

Pongamos la carga de 4 toneladas en la mitad del tramo. Segun el cuadro número 19, el valor de a correspondiente a $\theta = 0,25$ es

$$a = 0,6875$$

Tenemos pues

$$R_1 = R_2 = a \times P = 0,6875 \times 4000 = 2750 \text{ kg.}$$

El momento máximo debido a la carga rodante en la mitad del tramo será:

$$M_{max} = 750 \times 4 - 2750 \times 2 = -\text{kgs. } 2500$$

El error será pues:

$$\frac{2500 - 2660}{2660} = -6\% \text{ mas o ménos, en menos.}$$

Se ve, pues, que este método es mui espeditivo i bastante exacto.

53. *Tramo de 10 metros.*—Como última aplicacion, trataremos el caso de un tramo de 10 metros, con vigas de 30×35, sostenidas por torna-puntas de 30×30 a 2,50 metros de los estremos. Admitamos que las torna-puntas obran como apoyos fijos al mismo nivel que los apoyos estremos.

Peso muerto.—Suponiendo las vigas distantes de $1^m,25$ de eje a eje, el peso muerto por metro corrido de viga se descompone como sigue:

1.°	Tablones: $0,15 \times 1^m,25 \times 1^m \times$ kgs 900	169 kgs.
2.°	Vigas de $0,30 \times 0,35 \times 1^m \times$ kgs 900	94 "
3.°	Clavos i pernos.	7 "
4.°	Tierra i humedad.	30 "
	Peso por metro corrido de viga. . . .	300 kgs.

El momento en el medio de la viga debido al peso muerto será:

$$M_m = -\left\{1 - \frac{2(1+\theta^3)}{3+2\theta}\right\} \tfrac{1}{8}\, p\, l^2$$

$$\theta = 0,5 \quad p = 300^k \quad l = 5^m$$

El momento será:

$$M_{m} = -0{,}5 \times \tfrac{1}{8}\, 300 \times 25 = -\overset{\text{kg.m}}{468{,}75}$$

Carga rodante.—Colocando la carga de 4 toneladas en el medio del tramo central, tendremos, segun el cuadro núm. 19, $a = 0{,}6875$

$$R_1 = 4000 \times 0{,}6875 = 2750 \text{ kg.}$$

I el momento en la mitad será:

$$M_{m} = 750 \times 5 - 2{,}750 \times 2{,}5 = -3125 \text{ kgm.}$$

El momento máximo total tendrá por valor:

$$M_{max} = -468{,}75 - 3125 = -3593{,}75 \text{ kgm.}$$

i el trabajo máximo:

$$\frac{T}{S} = \frac{359375}{6125} = 58^{ks}{,}6 \ p \text{ cm.}^2$$

(Continuará)

GUILLERMO OTTEN,

Injeniero honorario de Puentes i Calzadas de Béljica, contratado por el Gobierno de Chile.