CURSO DE CÀLCULO INFINITESIMAL

O ANÁLISIS TRASCENDENTAL

(Continuacion)

13. Derivadas de las funciones implícitas.

Sea la ecuacion

(1) $$F(x, y) = C$$

en que C es una constante.

Se dice que y es *funcion implícita* de x i se trata de calcular $\frac{dy}{dx}$ sin resolver la ecuacion en y.

Si, de la ecuacion (1), se despejara y en funcion de x, se obtendria una relacion como

(2) $$y = f(x)$$

Para que este valor de y satisfaga a (1) es preciso que esta última ecuacion se verifique idénticamente cuando se reemplaza en ella y por $f(x)$, es decir que la espresion $F[x, f(x)]$ debe ser idénticamente igual a C; por consiguiente todos los términos que contienen x se deben destruir unos con los otros. Luego la derivada de esta funcion respecto a x debe ser igual a cero.

La funcion $F(x, f)$ es una funcion compuesta, su derivada respecto a x tiene por espresion

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{df}\,\frac{df}{dx}$$

Así esta espresion debe ser cero. Reemplazemos, en ella, f por su valor y, tendremos

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dx}\,\frac{dy}{dx}=0$$

O bien

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$$

El mismo resultado se obtiene de la manera siguiente:

Sea

$$z=F(x, y)$$

una funcion compuesta en que se considera y como funcion de x, se sabe que la diferencial de z tiene por espresion

$$dz=\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}\,dy$$

Si z debe ser igual a una constante C su diferencial debe ser nula, luego dx, dy deberán satisfacer a la ecuacion:

$$\frac{dF}{dx}\,dx+\frac{dF}{dy}dy=0$$

De aquí se despeja el mismo valor de $\frac{dy}{dx}$ que hemos encontrado mas arriba.

Regla.—*Para obtener la derivada de una funcion implícita como $F(x, y)=C$ se escribe que la diferencial del primer miembro, considerado como una funcion compuesta, es igual a cero.*

Aplicacion.—Se da la ecuacion

$$x^2+y^2=r^2$$

i se pide el valor de $\frac{dy}{dx}$. Segun la regla indicada, se tendrá

$$2x\,dx+2y\,dy=0$$

O bien

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Con las reglas anteriormente espuestas se puede obtener la derivada de una funcion cualquiera: Como la derivada representa, en jeometría, el coeficiente angular de la tanjente a una curva, se ve que este primer estudio nos permite ya trazar la tanjente a una curva, cualquiera que sea su ecuacion.

CAPÍTULO IV

DE LAS INTEGRALES

14. Si una funcion $F(x)$ tiene por diferencial $f(x)\,dx$, se dice que $F(x)$ es la *integral* de $f(x)\,dx$. Se ve que el cálculo de las integrales es el inverso del cálculo de las diferenciales.

Desde luego se puede demostrar que si $F(x)$ es una integral de $f(x)\,dx$, todas las integrales de $f(x)\,dx$ tendrán por espresion $F(x)+C$ en que C es una constante.

En efecto sean $F_1(x)$ i $F_2(x)$ dos integrales distintas de $f(x)\,dx$, estas dos funciones tendrán la misma derivada $f(x)$ luego la funcion $F_1(x)-F_2(x)$ tendrá siempre por derivada cero. Pero, se ha demostrado que una funcion que tiene una derivada siempre nula es constante, luego

$$F_1(x)-F_2(x)=C$$

O bien

$$F_1(x)=F_2(x)+C$$

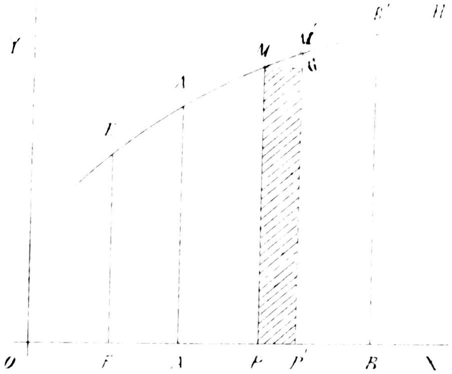
Recíprocamente, es evidente que las dos funciones $F(x)$ i $F(x)+C$ tienen la misma diferencial, cualquiera que sea la constante C.

Así se puede siempre añadir una constante arbitraria a la integral $F(x)$.

Representacion jeométrica de la integral.

Consideremos una curva plana referida a dos ejes rectangulares OX, OY i sea $y=f(x)$ su ecuacion.

Sea EH esta curva, EF una ordenada fija i MP una ordenada móvil de abcisa x; el área comprendido entre la curva, el eje OX i las dos ordenadas EF, MP será cierta funcion de x, representámosla por $F(x)$ i buscamos su diferencial. Para esto, incrementemos la variable x de cierta cantidad $PP' = dx$, el incremento de la funcion es representado por el trapezio infinitamente pequeño $MM'P'P$; la derivada de $F(x)$ será el límite de la razon entre $MM'P'P$ i dx; sabemos que en la determinacion de este límite se pueden despreciar los infinitamente pequeños de órden superior a dx, por consiguiente podemos reemplazar el trapezio $MM'P'P$ por el rectángulo $MCP'P$, pues la diferencia entre los dos es representada por el triángulo MCM'; este último tiene un área del mismo órden de pequeñez que el rectángulo de base MC i de altura $M'C$: MC es igual a dx i $M'C$ es infinitamente pequeño, luego el producto $MC \times M'C$ se puede despreciar; la derivada de $F(x)$ será, pues, el límite de



$\frac{MCP'P}{dx}$ o bien de $\frac{f(x)\,dx}{dx}$ o $f(x)$.

Así la funcion $F(x)$ que representa el área $EFMP$ tiene por derivada $f(x)$ i por consiguiente por diferencial $f(x)\,dx$, esta funcion $F(x)$ es, pues, la integral de $f(x)\,dx$.

Se ve que, cualquiera que sea la posicion de la ordenada fija EF, se obtendrá siempre la misma diferencial $f(x)\,dx$ para el área contada hasta la ordenada MP; ahora si el área contada desde EF hasta MP tiene por espresion $F(x)$ el área contada desde otra ordenada orijen tendrá una espresion como $F(x) + C$; es decir que se puede añadir a la integral de $f(x)\,dx$ una constante arbitraria, resultado conforme a lo que se ha obtenido mas arriba.

Notaremos ahora que el área $EFMP$ es el límite de la suma de un número infinitamente grande de trapezios infinitamente pequeños análogos al trapezio $MM'PP'$ i comprendidos entre EF i MP. Cada uno de estos trapezios se podrá reemplazar por un rectángulo análogo a $MC'PP'$, pues esta sustitucion equivale a despreciar infinitamente pequeños de órden superior i se sabe que el límite de la suma no cambia por esto; así la ingral $F(x)$ representa la suma de un número infinitamente grande de rectángulos infinitamente pequeños de base dx i de altura igual a los ordenadas sucesivas de la curva. Por este motivo se dice a veces *suma* de $f(x)\,dx$ en vez de *integral* de $f(x)\,dx$ i el signo que espresa la integral de $f(x)\,dx$ es una S algo deformada (inicial de la palabra suma). Así para espresar que $F(x)$ es la integral de $f(x)\,dx$ se escribe:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

I, para poner en evidencia la constante arbitraria que se puede añadir a la integral, se escribe tambien:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

La interpretacion jeométrica de la integral demuestra que esta existe siempre porque cuando se da una curva $y = f(x)$, el area comprendida entre esta curva, el eje OX i dos ordenadas tales como AF, MP es perfectamente determinada.

INTEGRALES DEFINIDAS E INDEFINIDAS

15. Cuando, como en el caso anterior, se considera el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje OX, una ordenada fija arbitraria i una ordenada móvil de abcisa x, se encuentra, para este área, una cierta funcion $F(x)$; esta funcion, como hemos visto, es la integral de $f(x)\,dx$ i se escribe:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$F(x)$ es lo que se llama la *integral indefinida* de $f(x)\,dx$.

Supongamos que se trate ahora de determinar el área comprendido entre la misma curva, el eje OX i las dos ordenadas AA', BB' de abcisas a i b se dira: como el área contada desde EF hasta la ordenada MP tiene por espresion: $F(x)+C$ se tiene tambien

$$\text{área } EFBB' = F(b) + C$$

$$\text{área } EFAA' = F(a) + C$$

I restando estas dos ecuaciones

$$\text{área } A'ABB' = F(b) - F(a)$$

La constante arbitraria C ha desaparecido como debia suceder, pues el área $A'ABB'$ no puede tener sino un solo valor, se escribe entónces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \tag{3}$$

Las dos letras b i a que se ponen arriba i abajo del signo suma representan los límites entre los cuales varia x i se llaman *límites de la integral; b* es el *límite superior* i a el *límite inferior.*

La integral $\int_a^b f(x)\, dx$ se llama *integral definida* porque x varia entre dos límites definidos.

Las dos clases de integrales definidas e indefinidas se llaman a veces *cuadraturas* para recordar su interpretacion jeométrica.

La fórmula (3) nos muestra inmediatamente que la *integral definida cambia de signo cuando se invierten los límites*; en efecto

$$\int_b^a f(x)\, dx = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(x)\, dx$$

En resúmen, para calcular una integral definida, habrá que determinar primero la integral indefinida. Cuando esta última no se puede obtener, se puede, a veces, calcular la integral definida, sea por medio de artificios que no obedecen a ninguna regla, sea por medio del método de Cauchy que será indicado mas tarde.

16. Las integrales indefinidas, a pesar de que su existencia ha sido bien demostrada, no por esto se pueden siempre obtener; la razon de esta dificultad es que las funciones que se emplean en matemáticas son en número mui reducido, de manera que varias integrales son funciones que no conocemos.

Por esto, los métodos de integracion que vamos a esponer ahora son mas bien una indicacion de la manera como se deben dirijir las investigaciones, pues en mui pocos casos se pueden obtener las integrales.

1.er método de integracion.—Es el método que consiste a examinar si la funcion que se trata de integrar es la diferencial de una funcion ya conocida. La aplicacion de este método requiere solamente, como se ve, un poco de memoria i alguna práctica. Así se tiene luego

$$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$$

$$\int \frac{dx}{x} = Lx$$

$$\int e^x\, dx = e^x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x$$

2.° Método por sustitucion.

Sea la integral

$$\int \sin x^m \cos x \, dx$$

A la variable x se sustituye otra variable y de tal manera que

$$\sin x = z$$

Entónces

$$\cos x \, dx = dz$$

$$\int \sin^m x \cos x \, dx = \int z^m \, dz = \frac{z^{m+1}}{m+1} = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$$

Se ve que la sustitucion de la variable z a la variable x ha trasformado la primera integral en otra que se sabe integrar una vez obtenida esta última integral se reemplaza en su espresion la variable z por su valor en funcion de x.

Sea, por ejemplo:

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Pongamos

$$1 + x^2 = z$$

Se tendrá

$$2 \, x \, dx = dz$$

Luego

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \int \frac{dz}{2 \sqrt{z}} = \sqrt{z} = \sqrt{1 + x^2}$$

Otro ejemplo. Sea

$$I = \int tg \, x \, dx$$

Se puede escribir

$$I = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x}$$

Pongamos

$$\cos x = z$$

Se tendrá

$$-\sin x\, dx = dz$$

$$I = -\int \frac{dz}{z} = -Lz = L\frac{1}{z} = L\frac{1}{\cos x}$$

La aplicacion de este método en los ejemplos anteriores es bien indicada por la forma misma de las funciones que se trataba de integrar. En los casos mas numerosos no sucede lo mismo i jeneralmente es una suerte cuando una sustitucion conduce así a la integracion; sin embargo cuando una integral no se puede obtener desde luego se debe siempre tratar de hacer una sustitucion de variable; cuando el método no conduce al resultado se aplica el siguiente:

17. Método de integracion por partes.—Es uno de los métodos que da relativamente mas integrales; su principio se deduce de la fórmula que da la diferencial de un producto de dos factores:

$$d(uv) = udv + vdu$$

O bien

$$udv = d(uv) - vdu$$

Si se toman las integrales de los dos miembros, se obtiene

$$\int udv = uv - \int vdu$$

1.º Ejemplo: Sea la integral: $\int x\, Lx\, dx$.

Haremos

$$\begin{cases} u = Lx \\ dv = x\, dx \end{cases} \quad \text{luego} \quad \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

I aplicando la regla indicada, tendremos

$$\int x\, Lx\, dx = \frac{x^2}{2} Lx - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} Lx - \frac{x^2}{4}$$

2.° Ejemplo: Sea la integral:

$$I_m = \int \frac{x^m \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

El índice m de I es el esponente de x en la integral. Hagamos

$$\begin{cases} u = x^{m-1} \\ dv = \dfrac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} \quad \text{luego} \quad \begin{cases} du = (m-1)\, x^{m-2} dx \\ v = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

Tendremos

$$I_m = -x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + (m-1)\int x^{m-2}\sqrt{1-x^2}\, dx$$

Pero

$$\int x^{m-2}\sqrt{1-x^2}\, dx = \int \frac{x^{m-2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = I_{m-2} - I_m$$

Luego

$$I_m = -x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + (m-1)\, I_{m-2} - (m-1) I_m$$

O bien

$$m\, I_m = (m-1)\, I_{m-2} - x^{m-1}\sqrt{1-x^2}$$

Esta fórmula da I_m en funcion de I_{m-2}; del mismo modo se podrá calcular I_{m-2} en funcion de I_{m-4} i así en seguida; llegaremos finalmente a I_1 si m es impar o *a* I_0 si m es par.

Se tiene ahora

$$I_1 = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen}\, x$$

Por consiguiente se podrá siempre calcular I_m.

No hai mas métodos jenerales para integrar; sin embargo, hai varias clases de funciones que siempre se pueden integrar segun reglas bien determinadas, la esposicion de estas reglas de integracion hará la materia del próximo capítulo.

CAPÍTULO V

DE LAS FUNCIONES QUE SE PUEDEN SIEMPRE INTEGRAR

Integracion de los polinomios aljebráicos enteros

18. Sea la integral

$$\int f(x)\,dx$$

en que se tiene

$$f(x)=A\,x^m+B\,x^{m-1}+\ldots\ldots+E$$

La integral buscada será la suma de las siguientes

$$A\int x^m\,dx+B\int x^{m-1}\,dx+\ldots\ldots+E\int dx$$

Se ve que la integracion se podrá siempre efectuar i se tendrá

$$\int f(x)\,dx=A\frac{x^{m+1}}{m+1}+B\frac{x^m}{m}+\ldots\ldots+Ex+C$$

Integracion de las fracciones racionales

19. Sea la integral

$$\int\frac{F(x)}{f(x)}dx$$

Si $F(x)$ i $f(x)$ son dos polinomios aljebráicos enteros se dice que $\frac{F(x)}{f(x)}$ es una fraccion racional.

Supondremos, en primer lugar, que $F(x)$ sea de grado superior a $f(x)$; se efectuará entónces la division de $F(x)$ por $f(x)$ hasta obtener una resta $\phi(x)$ de grado inferior a $f(x)$, i se escribirá

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\psi(x)+\frac{\phi(x)}{f(x)}$$

La funcion $\psi(x)$ es entónces un polinomio entero, i se admitirá que la fraccion $\frac{\phi(x)}{f(x)}$ es *irreductible.*

Se tendrá entónces

$$\int\frac{F(x)}{f(x)}dx=\int\psi(x)\,dx+\int\frac{\phi(x)}{f(x)}dx.$$

En el segundo miembro, $\psi(x)$ es un polinomio aljebráico entero, luego se puede efectuar la primera integral. La segunda tambien se puede efectuar si se descompone la fraccion $\frac{\phi(x)}{f(x)}$ en fracciones simples.

Indicaremos aquí como se hace esta descomposicion.

Descomposicion de las fracciones racionales en fracciones simples

20. Por hipótesis, se supone que la fraccion $\frac{\phi(x)}{f(x)}$ es *irreductible;* sea m el grado de la ecuacion $f(x)=0$ i a una raiz de órden n de multiplicidad, de manera que

$$f(x)=(x-a)^n f_n(x)$$

Se tiene idénticamente, cualquiera que sea la constante A_n:

$$\frac{\phi(x)}{f(x)}=\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{\phi(x)-A_n f_n(x)}{(x-a)^n f_n(x)}$$

Si se elije A_n de tal manera qne $\cancel{\phi(x)}$ contenga $x-a$ en factor se podrá suprimir el factor comun $x-a$ en los dos términos de la última fraccion i se tendrá

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{\phi_1(x)}{f_1(x)}$$

Con las relaciones

$$\phi(x) - A_n f_n(x) = (x-a)\,\phi_1(x)$$

$$(x-a)^{n-1} f_n(x) = f_1(x)$$

Se ve que $\phi_1(x)$ será de grado inferior a $f_1(x)$ i que $f_1(x)$ contiene $x-a$ a la potencia $n-1$ solamente; en jeneral la fraccion $\frac{\phi_1(x)}{f_1(x)}$ será irreductible, sin embargo podria suceder que sus dos términos tengan un factor comun; en este caso el factor comun tiene que ser una potencia de $x-a$ como se puede averiguar fácilmente. En todo caso $f_1(x)$ contendrá $x-a$ a la potencia $n-1$ a lo mas, de manera que se podrá escribir tambien

$$\frac{\phi_1(x)}{f_1(x)} = \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \frac{\phi_2(x)}{f_2(x)}$$

$f_2(x)$ contendrá $x-a$ a la potencia $n-2$ a lo mas; si se sigue de la misma manera se llegará finalmente a una relacion de la forma

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{\phi_n(x)}{f_n(x)}$$

La última fraccion será irreductible, su denominador no contendrá mas el factor $x-a$ i el grado de $\phi_n(x)$ será inferior al de $f_n(x)$. La primera constante A_n no puede ser nunca cero ni infinito porque su valor es dado por la ecuacion

$$A_n = \frac{\phi(a)}{f_n(a)}$$

en que los dos términos son diferentes de cero; miéntras tanto, los otros coeficientes $A_{n-1} \ldots\ldots A_1$ o varios de ellos podrán ser nulos.

La descomposicion podrá seguir de la misma manera, quitando sucesivamente a $f(x)$ todas sus raices. Como $\phi_n(x)$ es siempre de grado inferior a $f_n(x)$ se ve que finalmente se llegará a una última fraccion de la misma forma que las anteriores.

Es fácil ahora de ver que la descomposicion, cualquiera que sea el procedimiento que se adopte para hacerla, dará siempre las mismas fracciones simples; en efecto, supongamos que se tenga a la vez

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{\phi_n(x)}{f_n(x)}$$

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{A'_{n'}}{(x-a)^{n'}} + \frac{A'_{n'-1}}{(x-a)^{n'-1}} + \ldots\ldots + \frac{A'_1}{x-a} + \frac{\phi'_n(x)}{f_n(x)}$$

Supongamos $n' > n$; los segundos miembros deben ser idénticos; si se multiplican por $(x-a)^{n'}$ i si en el resultado de la multiplicacion se hace $x = a$ se obtendrá

$$A'_{n'} = 0$$

Del mismo modo se veria que todos los numeradores de las fracciones en que el esponente de $x-a$ es superior a n deben ser cero, luego tendremos $n' = n$, se debe tener ahora

$$A_n + A_{n-1}(x-a) + \ldots\ldots + A_1(x-a)^{n-1} + \frac{\phi_n(x)}{f_n(x)}(x-a)^n =$$

$$= A'_n + A'_{n-1}(x-a) + \ldots + A'_1(x-a)^{n-1} + \frac{\phi'_n(x)}{f_n(x)}(x-a)^n$$

Haciendo en esta relacion $x = a$ se obtiene $A_n = A'_n$; dividiendo entónces los dos miembros por $x-a$ i haciendo de nuevo $x = a$ se obtiene $A'_{n-1} = A_{n-1}$, i así en seguida.

Caso de las raices imajinarias.—Sea $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ una raiz de órden p de multiplicidad; a esta raiz corresponderá otra $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ del mismo órden de multiplicidad, de manera que se podrá escribir

$$f(x)=[(x-\alpha^2)+\beta^2]^p f_p(x)$$

Se tiene, entónces, la identidad

$$\frac{\phi(x)}{f(x)}=\frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p}+\frac{\phi(x)-(Mx+N)f_p(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p f_p(x)}$$

Se determinan M i N de tal manera que el numerador de la última fraccion sea divisible por $(x-\alpha)^2+\beta^2$; bastará para esto, reemplazar x por $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ e igualar a cero la parte real i el coeficiente de $\sqrt{-1}$ en el resultado de la sustitucion. M i N serán perfectamente determinados.

La última fraccion se podrá entnóces simplificar i en seguida descomponer de la misma manera que $\frac{\phi(x)}{f(x)}$. Se ve que el procedimiento es el mismo que en el caso de las raices reales i se obtendrá una serie de fracciones en que los denominadores serán potencias de $[(x-\alpha^2)+\beta^2]$ i los numeradores polinomios del primer grado.

ALBERTO OBRECHT
Director del Observatorio Astronómico
Profesor de las clases de mecánica i cálculo diferencial e integral de la Universidad

(Continuará)