DIBUJO PRÁCTICO DEL MAPA DE CHILE

En los ANALES DE LA UNIVERSIDAD tomo LXXXII se ha publicado un estudio sobre el sistema de desarrollo mas conveniente para representar el Mapa de Chile. La conclusion de este estudio ha sido que el sistema llamado *policónico* es el que se debe lójicamente aplicar en Chile.

Se han dado igualmente las espresiones de las coordonadas rectilíneas x, y del punto representativo de un lugar de latitud λ i de lonjitud ψ. Estas coordenadas se refieren, en el plano del mapa, a dos ejes de coordenadas rectangulares: uno de ellos, el eje OY, es el meridiano de Santiago (anteojo meridiano del Observatorio Nacional) i es dirijido de norte a sur; el otro OX, es perpendicular al primero. Las fórmulas que dan x e y son las siguientes (páj. 887.)

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
x &= r \operatorname{sen} \theta \\
y &= s + r\,(1 - \cos\theta) \\
\theta &= \psi \operatorname{sen} \lambda \\
r &= a \operatorname{cotg} \lambda + \frac{a\,e^2}{4} \operatorname{sen} 2\lambda \\
s &= a\left(1 - \frac{e^2}{4}\right)(\lambda - \lambda_m) - \frac{3\,a\,e^2}{8}(\operatorname{sen} 2\lambda - \operatorname{sen} 2\lambda_m)
\end{aligned}
\right.
$$

En estas fórmulas, a es el radio ecuatorial de la tierra, e la escentricidad de la elipse meridiana del esferoide terrestre i λ_m cierta latitud oríjen. Esta última se puede elejir arbitrariamente, de modo que el valor de s se puede tambien escribir así

$$s = s_0 + a\left(1 - \frac{e^2}{4}\right)\lambda - \frac{3\,a\,e^2}{8}\,\text{sen}\,2\,\lambda$$

Los valores de x e y se pueden simplificar, pues el ángulo ψ, lonjitud de los puntos del mapa respecto del meridiano central, llega a lo mas a cinco grados en Chile. En estas condiciones se puede reemplazar sen θ i cos θ por sus desarrollos en serie i escribir

$$x = r\,\theta + r\frac{\theta^3}{6} + \ldots\ldots$$

$$y = s + r\frac{\theta^2}{2} + \ldots\ldots$$

El término en θ^3 es mui pequeño; en efecto su valor aproximado es

$$\frac{r\,\theta^3}{6} = \frac{a}{6}\psi^3\cos\lambda\,\text{sen}^2\,\lambda = \frac{a}{24}\psi^3\,(\cos\lambda - \cos 3\,\lambda)$$

En un mapa a la escala de $\frac{1}{100{,}000}$, a es igual a 64 metros mas o ménos, i, en el caso de Chile, el ángulo ψ llega a cinco grados en la rejion situada entre 40 i 50 grados de latitud; ahí el término en θ^3 puede llegar a unos 2 milímetros; en los demas puntos del pais, su valor queda siempre menor que un milímetro.

Los mapas de gran escala no se dibujan en una sola hoja; no seria ventajoso ni práctico. Así, el mapa de Chile a la escala de $\frac{1}{100{,}000}$ tendria unos 40 metros de largo. Por otra parte, los estudios preliminarios de caminos, de ferrocarriles, de canales, etc., se hacen con mas comodidad cuando el mapa está dividido en hojas separadas i pequeñas. Por consiguiente, se deben considerar dos clases de mapas: unos, en hojas sueltas, de gran escala; otros, de conjunto, i de pequeña escala.

Mapa de conjunto

Como se ha establecido mas arriba, el término en θ^3 que figura en la espresion de x, alcanza en Chile a unos 2 milímetros en un mapa a la escala de $\frac{1}{100{,}000}$, luego se podrá despreciar este término cuando se trata del mapa de conjunto. Se tiene entónces

$$x = r\,\theta$$

$$y = s + \frac{r}{2}\,\theta^2$$

O bien si se reemplazan r i θ por sus valores (1).

$$x = \left[\left(a + \frac{a\,e^2}{8}\right)\cos\lambda - \frac{a\;e^2}{8}\cos 3\,\lambda\right]\psi$$

$$y = s + \frac{a}{4}\,\psi^2 \text{ sen } 2\,\lambda$$

Estas ecuaciones pueden escribirse de la manera siguiente:

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= b\,\psi \\ y &= s + c\,\psi^2 \end{aligned}\right.$$

I se tiene

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} b &= \left(a + \frac{a\,e^2}{8}\right)\cos\lambda - \frac{a\,e^2}{8}\cos 3\,\lambda \\ c &= \frac{a}{4} \text{ sen } 2\,\lambda \\ s &= s_0 + \left(a - \frac{a\,e^2}{4}\right)\lambda - \frac{3\,a\,e^2}{8} \text{ sen } 2\,\lambda \end{aligned}\right.$$

Los valores de b, c, s dependen solo de la latitud del lugar, i son, por consiguiente, constantes para los puntos de un mismo paralelo. De tal manera que las ecuaciones de un paralelo son las ecuaciones (2) en las cuales ψ solo es variable. Estas ecuaciones son las de una *parábola*; así, en la estension del mapa de Chile los paralelos pueden ser considerados como arcos de parábola.

Si se adopta como unidad de largo el kilómetro se obtiene

$$b = 6383^{km},84 \cos\lambda - 5^{km},45 \cos 3\lambda$$
$$c = 1594^{km},6 \operatorname{sen} 2\lambda$$
$$s = s_0 + 6367^{km}, 48\lambda - 16^{km},36 \operatorname{sen} 2\lambda$$

Como b i c son multiplicados respectivamente por ψ i ψ^2 se supondrá, para mas comodidad, que la lonjitud ψ es espresada en grados i fraccion decimal de grados, se deberá entónces multiplicar b por el valor numérico del arco de un grado i c por el cuadrado de este valor; sean b_1 i c_1 estos productos; se obtiene

$$b_1 = 111^{km},42 \cos\lambda - 0^{km},095 \cos 3\lambda$$
$$c_1 = 0^{km},487 \operatorname{sen} 2\lambda$$

Se ha construido una Tabla (Tabla I) en la cual se dan los valores de s, b_1, c_1 para todos los grados de latitud desde 17° hasta 57°. Los valores de s se han calculado desde el paralelo de 17°.

Para construir un arco de paralelo se hace

$$y = s + \delta y$$

entónces

$$\delta y = b_1 \psi^2$$

Supondremos, por ejemplo, que se trata de dibujar el paralelo de 45°, se halla en la Tabla I

$$s = 3104^{km},5 \quad \text{desde el paralelo de } 17^\circ$$
$$b_1 = 78,85$$
$$c_1 = 0,49$$

Con estos valores se obtiene

ψ	x	δy
1.°	$78^{km},9$	$0^{km},5$
2.°	157 ,7	2 ,0
3.°	236 ,6	4 ,4
4.°	315 ,4	7 ,8
5.°	394 ,3	12 2

A la escala de $\frac{1}{1.000,000}$ los kilómetros serian representados por milímetros en el mapa.

Mapa de gran escala

Como lo propone el señor Bertrand en su *Memoria acerca de la formacion de plano topográfico de Chile*, se pueden adoptar las siguientes dimensiones para las hojas separadas: 20 minutos entre meridianos i 15 minutos entre paralelos.

Cada hoja puede ser considerada entónces como la proyeccion ortogonal de la porcion correspondiente del esferoide terrestre sobre el plano tanjente en el punto medio de la porcion considerada.

A la escala de $\frac{1}{100,000}$ i en la estension de cada hoja, los arcos de meridiano i de paralelos pueden ser reemplazados por las cuerdas respectivas. En efecto, sea s un arco pequeño de una curva, R su radio de curvatura, ϵ la distancia mayor entre la curva i su cuerda, se tiene sensiblemente.

$$\epsilon = \frac{s^2}{8R}$$

Consideremos un arco de paralelo correspondiente a la latitud λ i sea ψ el ángulo de los meridianos que limitan el arco considerado. Si se proyecta este arco sobre el plano tanjente a la esfera, en un punto del arco de paralelo considerado, el radio de curvatura de esta proyeccion es

$$R = a \text{ cotg. } \lambda$$

Por otra parte.

$$s = a \psi \cos \lambda$$

Luego

$$\epsilon = \frac{a}{16} \psi^2 \text{ sen } 2\lambda$$

Si se toma $\psi = 10'$; $a = 64$ metros (es el radio terrestre reducido a la escala $\frac{1}{100,000}$) se obtiene

$$\epsilon = 0^{mm},04 \text{ sen } 2\lambda$$

Consideremos ahora un arco de meridiano, a una distancia angular ψ del meridiano central de la hoja; el radio de curvatura de la parte de su proyeccion comprendida entre los paralelos de la hoja será

$$R = \frac{a}{\psi \cos \lambda}$$

Sea $\Delta \lambda$ la distancia de los dos paralelos, se tendrá

$$s = a \, \Delta \lambda$$

Luego

$$\epsilon = \frac{a}{8} \, \Delta \lambda^2 \, \psi \cos \lambda$$

Si se hace $\Delta \lambda = 15'$ i $\psi = 10'$ se obtiene

$$\epsilon = 0^{mm},0005 \cos \lambda$$

Se ve que los valores de ϵ son insensibles. Todavía se podrian juntar 9 hojas i los valores de ϵ llegarian a $0,^{mm}3$ para los arcos de paralelo i $0,^{mm}02$ para los arcos de meridiano.

En resúmen, las hojas del mapa al $\frac{1}{100{,}000}$ tendrán la forma de trapezios rectilíneos.

Llamaremos B la base norte i b la base sur, L el largo de los lados laterales. En la Tabla II se dan los valores de estos elementos para todos los grados de latitud desde 17° hasta 57°; los largos son espresados en milímetros en la hipótesis de un mapa al $\frac{1}{100{,}000}$. Las fórmulas que sirven para el cálculo de esta Tabla son

$$B = 371,^{mm}4 \cos \lambda - 0,^{mm}3 \cos 3\lambda$$

$$b = B - 1,^{mm}6 \operatorname{sen} \lambda$$

$$L = 277,^{mm}8 - 1,^{mm}4 \cos 2\lambda$$

TABLA I

Valores de las cantidades s, b_1, c_1 que figuran en las fórmulas

$$x = b_1 \psi, \qquad y = s + c_1 \psi_2.$$

En estas fórmulas, ψ es la lonjitud jeográfica respecto de Santiago i espresada en grados i fraccion decimal de grado.

λ	s		b_1		c_1	λ	s		b_1		c_1
	km.	Diff.	km.	Diff.	km.		km.	Diff	km.		km.
17°	0,0		106,49		0,27	37°	2216,1		89,01		0,47
		110,7		0,58				111,0		1,17	
18	110,7		105,91		0,28	38	2327,1		87,84		0,47
		110,6		0,61				111,0		1,21	
19	221,3		105,30		0,30	39	2438,1		86,63		0,47
		110,7		0.64				111,0		1,23	
20	332,0		104,66		0,31	40	2549,1		85,40		0,48
		110,7		0,68				111,0		1,26	
21	442,7		103,98		0,32	41	2660,1		84,14		0,48
		110,8		0,71				111,1		1,28	
22	553,5		103,27		0,33	42	2771,2		82,86		0,48
		110,7		0,74				111,1		1,31	
23	664,2		102,53		0,35	43	2882,3		81,55		0,49
		110,7		0,77				111,1		1,34	
24	774,9		101,76		0,36	44	2993,4		80,21		0,49
		110,8		0,80				111,1		1,36	
25	885,7		100,96		0,37	45	3104,5		78,85		0,49
		110,8		0,83				111,2		1,38	
26	996,5		100,13		0,38	46	3215,7		77,47		0,49
		110,8		0,87				111,1		1,41	
27	1107,3		99,26		0,39	47	3326,8		76,06		0,49
		110,8		0,89				111,2		1,43	
28	1218,1		98,37		0,40	48	3438,0		74,63		0,48
		110,8		0,92				111,2		1,45	
29	1328,9		97,45		0,41	49	3549,2		73,18		0,48
		110,8		0,96				111,2		1,48	
30	1439,7		96,49		0,42	50	3660,4		71,70		0,48
		110,9		0,98				111,3		1,50	
31	1550,6		95,51		0,43	51	3771,7		70,20		0,47
		110,8		1,01				111,3		1,52	
32	1661,4		94,50		0,44	52	3883,0		68,68		0,47
		110,9		1,04				111,2		1,54	
33	1772,3		93,46		0,44	53	3994,2		67,14		0,47
		110,9		1,07				111,3		1,57	
34	1883,2		92,39		0,45	54	4105,5		65,57		0,46
		111,0		1,10				111,4		1,58	
35	1994,2		91,29		0,46	55	4216,9		63,99		0,45
		110,9		1,12				111,3		1,60	
36	2105,1		90,17		0,46	56	4328,2		62,39		0,45
		111,0		1,16				111,4		1,62	
37	2216 1		89,01		0,47	57	4439,6		60,77		0,44

TABLA II

Dimensiones de los trapezios de 20′ entre meridianos i 15′ entre paralelos *B* i *b* bases paralelas. *L* lados segun los meridianos.

Escala del mapa $\frac{1}{100{,}000}$

λ	*B*	Diff.	*B–b*	*L*	λ	*B*	Diff.	*B–b*	*L*
	mm.	mm.	mm.	mm.		mm.	mm.	mm.	mm.
17°	355,0		0,5	276,6	37°	296,7		1,0	277,4
		2,0					3,9		
18	353,0		0,5	276,7	38	292,8		1,0	277,5
		2,0					4,0		
19	351,0		0,5	276,7	39	288,8		1,0	277,5
		2,1					4,1		
20	348,9		0,5	276,7	40	284,7		1,0	277,6
		2,3					4,2		
21	346,6		0,6	276,8	41	280,5		1,0	277,6
		2,4					4,3		
22	344,2		0,6	276,8	42	276,2		1,1	277,7
		2,4					4,4		
23	341,8		0,6	276,8	43	271,8		1,1	277,7
		2,6					4,4		
24	339,2		0,6	276,9	44	267,4		1,1	277,8
		2,7					4,6		
25	336,5		0,7	276,9	45	262,8		1,1	277,8
		2,7					4,6		
26	333,8		0,7	276,9	46	258,2		1,1	277,8
		2,9					4,7		
27	330,9		0,7	277,0	47	253,5		1,2	277,9
		3,0					4,7		
28	327,9		0,7	277,0	48	248,8		1,2	277,9
		3,1					4,9		
29	324,8		0,8	277,1	49	243,9		1,2	278,0
		3,2					4,9		
30	321,6		0,8	277,1	50	239,0		1,2	278,0
		3,2					5,0		
31	318,4		0,8	277,1	51	234,0		1,2	278,1
		3,4					5,1		
32	315,0		0,8	277,2	52	228,9		1,2	278,1
		3,5					5,2		
33	311,5		0,9	277,2	53	223,7		1,3	278,2
		3,5					5,2		
34	308,0		0,9	277,3	54	218,5		1,3	278,2
		3,7					5,2		
35	304,3		0,9	277,3	55	213,3		1,3	278,3
		3,7					5,3		
36	300,6		0,9	277,4	56	208,0		1,3	278,3
		3,9					5,4		
37	296,7		1,0	277,4	57	202,6		1,3	278,4

A. OBRECHT