MECÁNICA RACIONAL

SEGUNDA PARTE

DE LOS SISTEMAS MATERIALES

(Continuacion)

CAPÍTULO VIII

MOVIMIENTO DE UN SÓLIDO INVARIABLE DE REVOLUCION FIJADO EN UN PUNTO DE SU EJE.—APLICACION AL MOVIMIENTO DE LA TIERRA AL REDEDOR DE SU CENTRO DE GRAVEDAD I AL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS PESADOS DE REVOLUCION.

Cuando el elipsoide de inercia es de revolucion, los dos ejes G i ω estan situados siempre en un mismo meridiano, porque la normal, en un punto cualquiera de una superficie de revolucion, encuentra el eje; esta propiedad resulta tambien de las fórmulas

(8) del capítulo anterior; éstas se reducen en efecto a las siguientes

$$u=0$$

$$tg\,\Delta'=\frac{C}{A}\,tg\,\Delta$$

Supondremos que el eje principal de inercia OZ_1 sea el eje de revolucion, entónces $B=A$ i las ecuaciones (9) i (10) del capítulo anterior dan

$$\frac{d\Delta}{dt}=-\frac{d\epsilon}{dt}\cos(\beta-\sigma)$$

$$\frac{d\beta}{dt}=\frac{G}{A}+\frac{d\epsilon}{dt}\,\frac{\operatorname{sen}(\beta-\sigma)}{tg\,\Delta}$$

$$\cos\Delta\,\frac{d\Delta}{dt}+\frac{d\beta}{dt}=G\left[\frac{\cos^2\Delta}{C}+\frac{\operatorname{sen}^2\Delta}{A}\right]$$

Caso en que el ángulo Δ es mui pequeño

Este es el caso mas importaute por sus aplicaciones, lo examinaremos con preferencia. Resolveremos primero el problema siguiente: *¿cuáles son las condiciones que deben cumplir las fuerzas esteriores para que el ángulo Δ quede indefinidamente del mismo órden de pequeñez?* En otros términos, estableceremos las condiciones que aseguran la *estabilidad* del movimiento de rotacion al rededor de un eje mui próximo del eje de revolucion.

Para mas claridad, supondremos que Δ queda infinitamente pequeño, durante cierto intervalo de tiempo determinado i buscaremos la condicion necesaria i suficiente para que Δ quede siempre infinitamente pequeño del mismo órden.

Despreciemos Δ^2 durante el intervalo de tiempo considerado; tendremos, a este órden de aproximacion.

$$G=C\omega=\text{Const}$$

I tambien

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\Delta}{dt} &= -\frac{d\epsilon}{dt}\cos(\beta-\sigma)\\
\frac{d\beta}{dt} &= \frac{C}{A}\,\omega + \frac{d\epsilon}{dt}\,\mathrm{sen}\,\frac{(\beta-\sigma)}{\Delta}\\
\frac{du}{dt} + \frac{d\beta}{dt} &= \frac{G\lambda}{C} = \omega
\end{aligned}
\right.
$$

Consideremos, en el plano instantáneo de rotacion, un sistema de dos ejes rectangulares, paralelos a los ejes OX, OY de la figura (23) i sean, respecto a estos ejes, x, y las coordenadas de la traza del eje OZ_1 en el plano considerado; podremos escribir, al mismo órden de aproximacion

$$
x = \frac{\Delta}{\sqrt{C}}\cos\beta
$$

$$
y = \frac{\Delta}{\sqrt{C}}\,\mathrm{sen}\,\beta
$$

O simplemente, *si se elije* $\frac{1}{\sqrt{C}}$ *como unidad de lonjitud*

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
x &= \Delta\cos\beta\\
y &= \Delta\,\mathrm{sen}\,\beta
\end{aligned}
\right.
$$

Las ecuaciones diferenciales a las cuales satisfacen x e y son, entónces, segun las dos primeras ecuaciones (1)

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\frac{C}{A}\,\omega y - \frac{d\epsilon}{dt}\cos\sigma\\
\frac{dy}{dt} &= +\frac{C}{A}\,\omega x - \frac{d\epsilon}{dt}\,\mathrm{sen}\,\sigma
\end{aligned}
\right.
$$

Para integrar este sistema de ecuaciones simultáneas, notaremos que el punto de coordenadas x, y describiria una circunferencia con la velocidad angular $\frac{C}{A}\omega$, si $\frac{d\epsilon}{dt}$ estuviera nulo; es, por consiguiente, lójico de poner

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \xi \cos \frac{C}{A}\omega t - \eta \operatorname{sen} \frac{C}{A}\omega t \\ y = \xi \operatorname{sen} \frac{C}{A}\omega t + \eta \cos \frac{C}{A}\omega t \end{cases}$$

Las ecuaciones (3) dan entónces

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{d\epsilon}{dt}\cos\sigma\cos\frac{C}{A}\omega t - \frac{d\epsilon}{dt}\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\frac{C}{A}\omega t$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt}\cos\sigma\operatorname{sen}\frac{C}{A}\omega t - \frac{d\epsilon}{dt}\operatorname{sen}\sigma\cos\frac{C}{A}\omega t$$

Sean ahora E_x, E_y las proyecciones del eje E sobre los ejes OX, OY, se tiene

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{E \operatorname{sen}(E, G)}{G}$$

Luego

$$\frac{d\epsilon}{dt}\cos\sigma = \frac{E_x}{G}$$

$$\frac{d\epsilon}{dt}\operatorname{sen}\sigma = \frac{E_y}{G}$$

Las proyecciones E_x, E_y serán jeneralmente funciones periódicas del tiempo i se podrá escribir

$$(5) \qquad \begin{cases} E_x = \Sigma E_\mu \cos(\mu t + \mu_0) \\ E_y = \Sigma E_\mu \operatorname{sen}(\mu t + \mu_0) \end{cases}$$

Luego, si se reemplaza G por su valor aproximado $C\omega$.

$$\frac{d\epsilon}{dt}\cos\sigma = \frac{1}{C\omega}\Sigma E_\mu \cos(\mu t + \mu_0)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt}\operatorname{sen}\sigma = \frac{1}{C\omega}\Sigma E_\mu \operatorname{sen}(\mu t + \mu_0)$$

De ahí se deduce

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{C\omega}\,\Sigma\, E_\mu \cos\left[\frac{C}{A}\,\omega t - \mu t - \mu_0\right]$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{C\omega}\,\Sigma\, E_\mu \operatorname{sen}\left[\frac{C}{A}\,\omega t - \mu t - \mu_0\right]$$

Sean Δ_0, ϕ_0 dos constantes arbitrarias, la integracion dará

$$\xi = \Delta_0 \cos\,\phi_0 - \frac{1}{C\omega^2}\,\Sigma\,\frac{E_\mu}{\frac{C}{A} - \frac{\mu}{\omega}} \operatorname{sen}\left[\frac{C}{A}\,\omega t - \mu t - \mu_0\right]$$

$$\eta = \Delta_0 \operatorname{sen}\,\phi_0 - \frac{1}{C\omega^2}\,\Sigma\,\frac{E_\mu}{\frac{C}{A} - \frac{\mu}{\omega}} \cos\left[\frac{C}{A}\,\omega t - \mu t - \mu_0\right]$$

Finalmente, segun (4).

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \Delta_0 \cos\left(\frac{C}{A}\,\omega t + \phi_0\right) + \frac{1}{C\omega^2}\,\Sigma\,\frac{E_\mu}{\frac{C}{A} - \frac{\mu}{\omega}} \operatorname{sen}(\mu t + \mu_0) \\ y &= \Delta_0 \operatorname{sen}\left(\frac{C}{A}\,\omega t + \phi_0\right) - \frac{1}{C\omega^2}\,\Sigma\,\frac{E_\mu}{\frac{C}{A} - \frac{\mu}{\omega}} \cos(\mu t + \mu_0) \end{aligned} \right.$$

Condiciones de estabilidad

1.° La primera condicion es que la espresion

$$\frac{C}{A} - \frac{\mu}{\omega}$$

sea diferente de cero; en efecto, si esta espresion estuviera nula, los valores de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ contendrian términos constantes, los cuales, por integracion, darian términos proporcionales al tiempo en los valores de ξ i η i en los valores de x e y; en este caso, el ángulo Δ no quedaria del mismo órden de pequeñez.

Esta condicion puede espresarse de otra manera: sea T el tiempo de la revolucion del sólido i τ el período de variacion del término E_μ se tiene

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \tau = \frac{2\pi}{\mu}$$

Luego la primera condicion de estabilidad es que *la razon entre el tiempo de la revolucion del sólido i uno cualquiera de los períodos de variacion de $E \cos \sigma$, E sen σ sea diferente de la razon entre los momentos principales C* i *A.*

2.° Si esta primera condicion es satisfecha, el ángulo Δ oscilará al rededor de Δ_0 i la amplitud de la oscilacion será del órden de los coeficientes

$$\frac{E_\mu}{C\omega^2\left(\frac{C}{A} - \frac{\mu}{\omega}\right)}$$

Cuando $\frac{\mu}{\omega}$ es diferente de $\frac{C}{A}$ el valor de estos coeficientes es del mismo órden que

$$\frac{E}{C\omega^2}$$

luego, en este caso, el eje E i la velocidad de rotacion ω deberán ser tales que la razon entre E i $C\omega^2$ sea del órden de pequeñez requerido para Δ.

Movimiento relativo del eje instantáneo de rotacion respecto del sólido, considerado como fijo

Consideremos un plano perpendicular al eje de revolucion i situado a la unidad de distancia del punto fijo O; sean, en este plano O' la traza del eje de revolucion i $O'X'$, $O'Y'$ dos ejes rectangulares ligados al sólido; estos ejes serán por ejemplo paralelos a los ejes OX_1, OY_1 de la figura 23; sean tambien x', y' las coordenadas de la traza M del eje instantáneo de rotacion en el plano considerado respecto de los dos ejes $O'X'$, $O'Y'$; la distancia $O'M$ será igual a Δ' i el ángulo de $O'M$ con $O'X'$ será igual segun la figura 23, a $180^\circ - \alpha$; luego

$$x' = -\Delta' \cos \alpha$$

$$y' = +\Delta' \operatorname{sen} \alpha$$

Ahora, segun la tercera de las fórmulas (1)

$$\alpha = \alpha_0 + \omega t - \beta$$

I, por otra parte

$$\Delta' = \frac{C}{A} \Delta$$

Luego

$$x' = -\frac{C}{A} \Delta \cos (\alpha_0 + \omega t - \beta)$$

$$= -\frac{C}{A} \left[x \cos (\alpha_0 + \omega t) + y \operatorname{sen} (\alpha_0 + \omega t) \right]$$

$$y' = +\frac{C}{A} \Delta \operatorname{sen} (\alpha_0 + \omega t = \beta)$$

$$= +\frac{C}{A} \left[x \operatorname{sen} (\alpha_0 + \omega t) - y \cos (\alpha_0 + \omega t) \right]$$

Las fórmulas (6) dan entónces

$$x' = -\frac{C}{A} \Delta_0 \cos \left(\frac{C-A}{A} \omega t + \phi_0 - \alpha_0 \right)$$

$$+ \frac{1}{\omega^2} \Sigma \frac{F\mu}{\frac{C}{A} - \frac{\mu}{\omega}} \operatorname{sen} (\omega t - \mu t + \alpha_0 - \mu_0)$$

$$y' = -\frac{C}{A} \Delta_0 \operatorname{sen} \left(\frac{C-A}{A} \omega t + \phi_0 - \alpha_0 \right)$$

$$+ \frac{1}{A\omega^2} \Sigma \frac{E\mu}{\frac{C}{A} - \frac{\mu}{\omega}} \cos (\omega t - \mu t + \alpha_0 - \mu_0)$$

Se puede hacer en estas fórmulas

$$\frac{C}{A}\Delta_0 = \Delta_0'$$

$$\alpha_0 = \phi_0 - \pi$$

Entónces

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} x' &= \Delta'_0 \cos \frac{C-A}{A}\omega t \\ &- \frac{1}{A\omega^2}\Sigma \frac{Eu}{\frac{C}{A}-\frac{\mu}{\omega}} \operatorname{sen}(\omega t - \mu t + \phi_0 - \mu_0) \\ y' &= \Delta'_0 \operatorname{sen} \frac{C-A}{A}\omega t \\ &- \frac{1}{A\omega^2}\Sigma \frac{E\mu}{\frac{C}{A}-\frac{\mu}{\omega}} \cos(\omega t - \mu t + \phi_0 - \mu_0) \end{aligned} \right.$$

Aplicacion al movimiento de la tierra al rededor de su centro de gravedad

Se calcula que las acciones combinadas del Sol i de la Luna, sobre el esferoide terrestre, equivalen a un par cuyo eje E tiene por valor máximo

$$\frac{C\omega^2}{10^7}$$

Ademas, las proyecciones del eje E sobre dos ejes, ligados al plano de rodadura, tienen períodos de variacion mui distintos de la duracion T de la revolucion del sólido, es decir del *dia sideral.*

Como, por otra parte, la razon entre C i A es mui próxima de uno, se ve que la rotacion al rededor de un eje próximo del eje de revolucion es estable i que el ángulo Δ se alejará de Δ_0 de una cantidad siempre menor que

$$\frac{E}{C\omega^2} = \frac{1}{10^7}$$

Esto equivale a 0",02; es un ángulo inapreciable a la obser-servacion.

El movimiento de la línea de los polos a la superficie de la tierra es dado por las fórmulas (7); en ellas, los términos que dependen de las acciones del Sol i de la Luna equivalen, como mas arriba, a una variacion angular máxima de 0",02, puesto que C es mui sensiblemente igual a A; si se desprecia este ángulo, las fórmulas (7) se reducen a las siguientes

$$x' = \Delta'_0 \cos \frac{C-A}{A} \omega t$$

$$y' = \Delta'_0 \operatorname{sen} \frac{C-A}{A} \omega t$$

Luego la línea de los polos describe, al rededor del eje de revolucion, un cono de revolucion, con una velocidad angular constante igual a $\frac{C-A}{A}\omega$; esta revolucion se efectúa por consiguiente en un número de dias siderales igual a $\frac{A}{C-A}$ lo que equivale sensiblemente a 305.

En resúmen, si Δ'_0 no es nulo, la línea de los polos describe a la superficie de la tierra i en 305 dias siderales un circunferencia de radio Δ'_0; ademas, la variacion posible de la línea de los polos debida a las acciones combinadas de la Luna i del Sol la alejan del círculo de radio Δ'_0 de una cantidad del órden máximo de 0",02 lo que, a la superficie de la tierra, equivale a *sesenta centímetros.*

Este período de 305 dias siderales ha sido indicado por primera vez por Euler, por esto se le llama *período euleriano.* Diremos, desde luego, que nada en la observacion indica la existencia efectiva de tal período lo que hace suponer que Δ'_0 es nulo o por lo ménos insensible.

Tales son los resultados de la teoría cuando se considera la tierra como un sólido invariable.

Movimiento de los sólidos pesados de revolucion fijados en un punto de su eje

Sea P el peso del sólido, l la distancia del centro de gravedad al punto fiio; i θ el ángulo que hace el eje de revolucion con la vertical a cierto momento t; las fuerzas esteriores se componen en una resultante vertical, igual a P, i aplicada en el centro de gravedad; luego el eje E es horizontal i su magnitud es

$$E = Pl \operatorname{sen} \theta$$

Supongamos que, en el momento t, la rotacion se efectúa al rededor de un eje mui próximo del eje de revolucion i que la velocidad angular ω sea tal que la razon $\frac{E}{C\omega^2}$ sea mui pequeña; en este caso, el cambio de orientacion del eje G en el espacio será mui lento respecto de ω; se tiene en efecto

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{E}{G} = \frac{E}{C\omega} = \frac{E}{C\omega^2}\,\omega.$$

Como el eje de revolucion es, en este caso, mui próximo del eje G su cambio de orientacion será tambien mui lento, luego el eje E, perpendicular al plano vertical que contiene el eje de revolucion, cambiará mui lentamente de orientacion; las proyecciones de E sobre dos ejes rectangulares, situados en el plano de rodadura i ligados a este plano, tendrán, segun esto, un período de variacion mui pequeño respecto del tiempo de la revolucion del sólido, por consiguiente la rotacion del sólido es *estable*, salvo, sin embargo, en el caso que $\frac{C}{A}$ estuviera mui pequeño, como sucederia si el sólido tuviera la forma de una aguja, móvil al rededor de su eje.

Cono de precesion

En el caso jeneral, la rotacion se efectúa constantemente al rededor de un eje mui próximo del eje de revolucion, luego se podrá considerar Δ como infinitamente pequeño i despreciar Δ^2, entónces la lonjitud del eje G queda constante.

La extremidad del eje G tiene una velocidad igual a E, es decir, una velocidad constantemente horizontal; luego, como la lonjitud de G es constante, este eje describirá un cono de revolucion de eje vertical. Es el *cono de precesion.*

El ángulo del eje G con la vertical queda pues constante i al órden de aproximacion adoptado, este ángulo puede ser considerado como igual a θ. Segun esto, el eje E conserva constantemente el mismo valor, luego la estremidad del eje G describe una circunferencia horizontal, con una velocidad constante.

El radio de esta circunferencia es G sen θ, o bien $C\omega$ sen θ; sea por otra parte ψ el azimut, en el momento t, del plano vertical que contiene el eje de revolucion, se tendrá

$$C\,\omega \operatorname{sen}\theta \frac{d\psi}{dt} = E = Pl \operatorname{sen}\theta$$

Luego

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Pl}{C\omega}$$

Sea K el radio de jiracion del sólido, respecto de su eje de revolucion i M la masa total del sólido, se tiene

$$P = Mg, \quad C = MK^2$$

Luego

$$\frac{d\psi}{dt} = g\,\frac{l}{K^2\omega}$$

Así, la velocidad angular azimutal del eje de revolucion es proporcional a l inversamente proporcional a la velocidad angular de rotacion ω i al cuadrado del radio de jiracion, respecto del eje de revolucion; es tambien proporcional a la gravedad.

Movimiento relativo del sólido, respecto del plano instantáneo de rodadura

Este movimiento es determinado por las fórmulas jenerales (6). El plano de rodadura i el eje E son animados del mismo movimiento de rotacion, al rededor de un eje vertical, luego las proyecciones del eje E relativas a un sistema de dos ejes ligados al plano de rodadura quedan constantes; supondremos que uno de estos ejes es horizontal se tendrá entónces

$$E \cos \sigma = E = Pl \operatorname{sen} \theta$$

$$E \operatorname{sen} \sigma = 0$$

I las fórmulas (6) nos darán

$$x = \Delta_0 \cos\left(\frac{C}{A}\omega t + \phi_0\right)$$

$$y = \Delta_0 \operatorname{sen}\left(\frac{C}{A}\omega t + \phi_0\right) - \frac{APl \operatorname{sen}\theta}{G^2\omega^2}$$

Si, en el momento inicial, la constante Δ_0 es nula, el punto de coordenadas x, y quedará fijo en el plano de rodadura, luego el eje de revolucion tendrá, en este caso, una inclinacion fija en el espacio; en jeneral Δ_0 no es nulo i la traza del eje de revolucion describe en el plano de rodadura una circunferencia de radio Δ_0 con una velocidad angular constante e igual $\frac{C}{A}\omega$.

Este movimiento del eje de revolucion respecto del eje G toma, en la observacion, la apariencia de una trepidacion del eje de revolucion.

Supongamos, por ejemplo, que, en el momento inicial, $t=0$, el sólido jire exactamente al rededor del eje de revolucion, las fórmulas precedentes deberán dar $x=y=0$ en el momento $t=0$, luego

$$\phi_0 = 90^\circ$$

$$\Delta_0 = \frac{APl \operatorname{sen}\theta}{G^2\omega^2}$$

Se tiene entónces

$$x = -\frac{APl \operatorname{sen}\theta}{C^2\omega^2} \operatorname{sen}\frac{C}{A}\omega t$$

$$y = -2\frac{APl \operatorname{sen}\theta}{C^2\omega^2} \operatorname{sen}^2\frac{C\omega t}{2A}$$

En este caso, las trepidaciones verticales tienen un período igual a

$$\frac{\pi A}{C\omega}$$

i la amplitud es proporcional al seno del ángulo θ, a la distancia l, a la razon $\frac{A}{C}$ e inversamente proporcional al cuadrado de la velocidad angular i al cuadrado del radio de jiracion, respecto del eje de revolucion.

Todos estos resultados son verificados por la esperiencia.

Efecto de una fuerza aplicada en un punto del eje de revolucion

Sea F la fuerza considerada, esta fuerza puede ser reemplazada por una fuerza igual aplicada en el punto fijo i un par cuyo eje E es perpendicular al plano que contiene la fuerza i el eje de revolucion.

Supondremos que la rotacion del sólido se efectúa al rededor de un eje mui sensiblemente confundido con el eje de revolucion; entónces el eje E será tambien perpendicular a G.

Se sabe ahora que el efecto del eje E es de dar a la extremidad del eje G una velocidad igual a E, luego se puede decir que el efecto de la fuerza F sobre el sólido es de dar al eje de revolucion una velocidad perpendicular al plano que contiene F i el eje de revolucion. Ademas, la velocidad angular ω no será alterada por la accion de F; en efecto, como E es perpendicular sobre G, la velocidad de la estremidad del eje G es normal a este eje i su lonjitud queda constante; por otra parte $G = C\omega$, luego ω queda constante.

CAPÍTULO IX

CHOQUE DE LOS CUERPOS

Cuando los cuerpos de la naturaleza chocan unos con otros, se observa un cambio *brusco* en el movimiento de cada uno de ellos, luego las acciones que se desarrollan durante el choque pueden considerarse como *percusiones*.

Segun esto, se podrá despreciar, durante el choque, el cambio de lugar de los cuerpos que chocan i el efecto, sobre ellos, de las fuerzas esteriores.

Se sabe, por otra parte, que el efecto de las impulsiones sobre los cuerpos no cambia cuando se refieren los cuerpos i las impulsiones a un sistema de comparacion fijo en el espacio o a un sistema animado de una traslacion recta i uniforme; luego se podrá, en cada caso particular, elejir un sistema de comparacion animado de una traslacion de velocidad igual a la que posee el centro de gravedad de uno de los cuerpos que chocan; en otros términos, en la teoría jeneral del choque de los cuerpos, se podrá siempre suponer que el centro de gravedad de uno de ellos está en reposo, ántes del choque.

Las percusiones que se desarrollan, durante el choque, satisfacen al principio de la igualdad entre la accion i la reaccion; luego el sistema de los vectores, formado con las cantidades de movimiento de todos los puntos del conjunto de los cuerpos que chocan, queda equivalente a sí mismo, ántes i despues del choque.

La aplicacion de este principio da inmediamente *seis* ecuaciones entre las cantidades de movimiento de los puntos de todos los cuerpos despues del choque; luego, si despues del choque, los cuerpos quedan fijados unos a otros i se mueven como un sólido invariable único, el movimiento de este sólido estará completamente determinado.

Este es el único caso en que el principio de la igualdad entre la accion i la reaccion permite determinar completamente el movimiento de los cuerpos, despues de un choque.

En los casos mas frecuentes, los cuerpos, despues del contacto, se separan unos de otros i es bien evidente que seis ecuaciones no bastan entónces para determinar su movimiento.

Sin embargo, el problema puede todavía resolverse completamente cuando, en el choque de dos sólidos invariables, la percusion que cada uno recibe del otro puede representarse por un vector único; en efecto, las dos percusiones simultáneas son entónces iguales i de sentido contrario; su punto de aplicacion i su direccion son tambien conocidos, puesto que las dos percusiones son normales a las dos superficies de los sólidos en el punto de contacto; luego basta conocer su intensidad comun para determinar el movimiento de cada sólido. Es una sola incógnita i una sola ecuacion bastará para determinarla.

Esta ecuacion se deduce del principio de la *conservacion de la enerjía*. La enerjía de un cuerpo en movimiento es la suma de su enerjía cinética i de su enerjía potencial interior; en los sólidos invariables, la enerjía potencial interior queda, por definicion, invariable; ahora, durante el choque, se desprecia la accion de las fuerzas esteriores; luego la enerjía cinética total de los dos sólidos deberá ser la misma, ántes i despues del choque; se obtiene así una ecuacion, i esta determina la intensidad comun de las percusiones consideradas.

En resúmen, los principios fundamentales de la mecánica, establecidos hasta ahora, permiten resolver completamente el problema del choque en los dos casos siguientes: 1.º cuando, despues del choque, los cuerpos quedan ligados unos a otros i se mueven como un sólido invariable único; 2.º cuando dos sólidos invariables chocan uno con otro de tal manera que la percusion desarrollada durante el choque pueda representarse por un vector único.

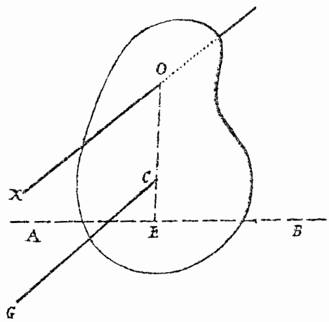
Los resultados obtenidos, en el caso del choque de dos sólidos invariables, se aplican jeneralmente a los cuerpos elásticos; la enerjía potencial interior de estos cuerpos varia durante el choque, porque se produce siempre cierta deformacion; pero se puede admitir que, despues del choque, esta enerjía potencial vuelve a adquirir el mismo valor, cuando el cuerpo ha vuelto a tomar su forma primitiva; por lo demas se puede considerar el sólido invariable como un cuerpo *perfectamente elástico*.

Primer caso

Resolvamos el problema siguiente: *un cuerpo de masa M, al reposo, es chocado por otro cuerpo de masa m, animado de una traslacion de velocidad v; despues del choque, los dos cuerpos quedan ligados uno a otro i se mueven como un solo sistema invariable de masa $M + m$; determinar el movimiento de este sistema.*

Ántes del choque, las cantidades de movimiento de los dos cuerpos son equivalentes a una resultante de traslacion, igual a mv, i aplicada en el centro de gravedad del cuerpo de masa m; luego, despues del choque, las cantidades de movimiento del sistema invariable de masa $M+m$, deberán ser equivalentes a un vector único, igual a mv i situado sobre la misma línea de accion.

Fig. 24



Sea AB la línea de accion del vector mv i C el centro de gravedad del conjunto de los dos cuerpos, despues del choque; W la velocidad que toma el punto C; las cantidades de movimiento del sistema $M+m$ son equivalentes a una resultante de traslacion $(M+m)\,W$, aplicada en C, i a un par resultante, luego se debe tener

$$(M+m)\,W = mv$$

El eje del par resultante debe ser perpendicular al plano CAB sea G este eje i a la distancia CE del punto C a AB se tendrá

$$G = mv.\,a$$

En resúmen, si despues del choque, ninguna fuerza esterior obra sobre el sistema $M+m$, su centro de gravedad se moverá con una velocidad constante W i el movimiento del sistema al rededor del centro de gravedad será un movimiento de Poisot, en el cual el eje del par resultante de las cantidades de movimiento relativas es igual a G.

Para que el sistema $M+m$ tenga sólo un movimiento de traslacion es necesario que G sea nulo, luego a debe ser nulo: así la recta AB, que pasa por el centro de gravedad de m, debe tambien pasar por el centro de gravedad comun de M i m; en otros términos, la velocidad del cuerpo móvil ántes del choque debe ser dirijida hácia el centro de gravedad del cuerpo en reposo.

Péndulo balístico.—Centro de percusion

Supongamos que los dos cuerpos de masa M i m sean simétricos respecto del plano CAB, este plano será principal de inercia en todos sus puntos; luego, en el punto C, el eje G del plano de rodadura es confundido con un eje principal del elipsoide de inercia; el movimiento del elipsoide será pues una rotacion al rededor del eje G; sea ω la velocidad angular de esta rotacion i $(M+m)\,K^2$ el momento de inercia del sistema $M+m$ respecto del eje G, se tendrá

$$G=\omega\,(M+m)\,K^2$$

O bien

$$\omega=\frac{mv\,a}{(M+m)\,K^2}=\frac{a\,W}{K^2} \tag{1}$$

El sistema invariable $M+m$ es, por consiguiente, animado de una traslacion de velocidad W i de una rotacion al rededor del eje CG perpendicular a W; estos dos movimientos simultáneos se componen en una rotacion igual a ω, al rededor de un eje OX paralelo al primero i que pasa por cierto punto O de la recta CE; ademas, la distancia OC es tal que

$$OC=\frac{W}{\omega}=\frac{K^2}{a}.$$

Si el cuerpo M, al reposo, es sometido a la condicion de jirar precisamente al rededor del eje OX, la percusion que recibirá este cuerpo, por efecto del choque, no producirá ninguna reaccion sobre OX, puesto que el cuerpo, sometido a esta percusion, tiende a jirar al rededor de OX como si la ligazon no existiera.

La distancia OE del eje de rotacion al cuerpo de masa m es entónces igual a

$$a+\frac{K^2}{a}$$

Es la lonjitud del péndulo simple isócrono del péndulo compuesto formado por el sistema $M+m$, móvil al rededor de OX.

El punto E así definido por su distancia a OX se llama *centro de percusion.*

El péndulo balístico, como su nombre lo indica, es un aparato que sirve para medir la velocidad de los proyectiles. En el problema estudiado, el cuerpo de masa M es el péndulo i el cuerpo móvil de masa m, el proyectil. Se trata de determinar esperimentalmente su velocidad v ántes del choque.

El eje de rotacion del péndulo balístico es constituído por dos cuchillos que descansan sobre un plano horizontal; para que estos cuchillos no reciban reacciones durante el choque, se llenan las condiciones establecidas mas arriba, es decir: se da al péndulo una forma simétrica respecto del plano vertical, perpendicular a OX i que pasa por el centro de gravedad C; ademas se lanza el proyectil segun la recta AB, perpendicular al plano COX, de tal manera que AB encuentre este plano en el centro de percusion.

Sea entónces ω la velocidad angular del péndulo, despues del choque, se tiene, segun (1)

$$\omega = \frac{mv\,a}{(M+m)\,K^2}$$

Luego

$$v = \frac{M+m}{m}\,\frac{K^2}{a}\,\omega \tag{2}$$

Basta pues conocer ω para determinar v.

Sea l la lonjitud del péndulo simple isócrono del péndulo balístico i θ el ángulo que hace la recta OC con la vertical a cierto momento t, este ángulo es determinado por la ecuacion diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\theta = 0$$

Luego si se pone

$$\frac{g}{l} = \mu^2$$

Se tendrá

$$\theta = A \cos \mu t + B \operatorname{sen} \mu t$$

Las constantes A i B se determinan por la condicion que, en el momento $t=0$, se tenga $\theta=0$ i $\frac{d\theta}{dt}=\omega$; estas condiciones dan

$$A=0 \qquad B=\frac{\omega}{\mu}$$

Luego

$$\theta=\frac{\omega}{\mu}\operatorname{sen} \mu t$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega \cos \mu t$$

Sea ahora θ_0 la amplitud máxima de la primera oscilacion del péndulo; cuando $\theta=\theta_0$, la velocidad $\frac{d\theta}{dt}$ es nula, luego $\mu t=\frac{\pi}{2}$; de ahí se deduce

$$\theta_0=\frac{\omega}{\mu}=\omega\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Reemplacemos ω por su valor en la fórmula (2) tendremos

$$v=\frac{M+m}{m}\ \frac{K^2}{a}\sqrt{\frac{g}{l}}\ \theta_0$$

Sea

$$\frac{M+m}{m}\ \frac{K^2}{a}\sqrt{\frac{g}{l}}=C$$

C es una constante i su valor puede determinarse fácilmente; en efecto, la razon $\frac{M+m}{m}$ puede reemplazarse por la razon $\frac{P+p}{p}$, en la cual P i p son los pesos conocidos del péndulo i del proyectil; l es la lonjitud del péndulo simple, isócrono del péndulo compuesto, su valor se obtendrá si se hace oscilar el péndulo balístico i si se determina la duracion T de sus oscilaciones, se tiene entónces

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

La razon $\frac{K^2}{a}$ es la distancia h del centro de gravedad al eje de suspension; se la puede medir directamente; finalmente el ángulo θ_0 se determina directamente por la observacion.

En resúmen se tiene

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} C &= \frac{P+p}{p}\, h\, \frac{\pi}{T} \\ v &= C\,\theta_0 \end{aligned} \right.$$

Segundo caso.—Choque de dos sólidos invariables

Resolveremos el siguiente problema: *dos esferas homojéneas i perfectamente elásticas de masas M i m, chocan una con otra; determinar su movimiento despues del choque.*

Podemos, desde luego, suponer que el centro de la esfera M está en reposo, ántes del choque; sea entónces v la velocidad del centro de la esfera m, en el momento en que viene a chocar con M. La percusion X que cada esfera recibirá de la otra será dirijida segun la línea de los centros; luego si, ántes del choque, las dos esferas son animadas de movimiento de rotacion, al rededor de sus centros respectivos, estos movimientos de rotacion no serán alterados despues del choque; se puede, pues, prescindir de ellos.

Despues del choque, las cantidades de movimiento de la esfera M se compondrán en una resultante de traslacion igual a X; sea por consiguiente W la velocidad de su centro se tendrá

$$(4)\qquad MW = X$$

Sea tambien w la velocidad del centro de la esfera m despues del choque; la cantidad de movimiento resultante mw será la resultante jeométrica de mv i de $-X$, luego

$$\overline{mw} = \overline{mv} - \overline{X} \tag{5}$$

Para determinar X se aplicará el principio de la conservacion de la enerjía: la enerjía cinética de cada esfera es la suma de su enerjía cinética de traslacion i de su enerjía cinética de rotacion, como esta última no sufre alteracion, ántes i despues del choque, se puede como mas arriba prescindir de ella.

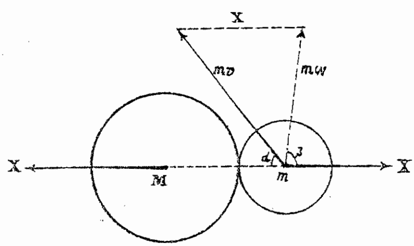
Ántes del choque la enerjía cinética total de las dos esferas era

$$\frac{1}{2} mv^2$$

i, despues del choque

$$\frac{1}{2} MW^2 + \frac{1}{2} mw^2$$

Fig. 25



Luego, segun el principio de la conservacion de la enerjía

$$MW^2 + mw^2 = mv^2 \tag{6}$$

Sea (fig. 25) α el *ángulo de incidencia*, es decir el ángulo que hace la velocidad v con la línea de los centros, en el momento del choque, se deduce de la fórmula (5)

$$m^2w^2 = m^2v^2 + X^2 - 2\, mv\, X \cos\alpha$$

Por consiguiente

$$mw^2 = mv^2 + \frac{X^2}{m} - 2\, X \cos\alpha$$

La fórmula (6) se trasforma entónces en la siguiente

$$\frac{X^2}{M} + mv^2 + \frac{X^2}{m} 2v\, X \cos \alpha = mv^2$$

De ahí se deduce

$$X = \frac{2\, M\, m}{M+m}\, v \cos \alpha$$

Sea β el ángulo de la velocidad w con la percusion que recibe la esfera m, β será el *ángulo de reflexion*; la ecuacion (5) es equivalente a las dos siguientes

$$mv \cos \alpha + mw \cos \beta = X$$

$$mv \,\text{sen}\, \alpha + mw \,\text{sen}\, \beta = 0$$

Tendremos finalmente si se reemplaza X por su valor

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} W &= \frac{2\, m}{M+m}\, v \cos \alpha \\ w \cos \beta &= \frac{M-m}{M+m}\, v \cos \alpha \\ w \,\text{sen}\, \beta &= v \,\text{sen}\, \alpha \end{aligned} \right.$$

Estas fórmulas resuelven completamente el problema, pues la velocidad W de la esfera M es dirijida segun la línea de los centros i su magnitud es dada por las fórmulas (7); las mismas fórmulas dan la magnitud i la direccion de la velocidad w.

Si la masa M es infinitamente grande respecto de m, las fórmulas (7) se reducen a las siguientes

$$W = 0$$

$$w \cos \beta = v \cos \alpha$$

$$w \,\text{sen}\, \beta = v \,\text{sen}\, \alpha$$

Luego, la esfera M queda al reposo i la velocidad w de la esfera m conserva el valor primitivo v; ademas el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexion.

Si las masas M i m son iguales, las fórmulas (7) dan

$$W = v \cos \alpha$$

$$w \cos \beta = 0$$

$$w \operatorname{sen} \beta = v \operatorname{sen} \alpha$$

La segunda fórmula indica que el ángulo β es igual a 90°, luego las velocidades de los centros de las dos esferas son perpendiculares entre sí despues del choque; se tiene en seguida

$$W = v \cos \alpha$$

$$w = v \operatorname{sen} \alpha$$

Luego la velocidad de cada esfera es la proyeccion sobre su direccion misma de la velocidad inicial v de la esfera móvil.

VARIACION DE LA ENERJÍA CINÉTICA DE LOS CUERPOS DURANTE EL CHOQUE

La enerjía total de un cuerpo es la suma de su enerjía potencial interior i de su enerjía cinética; esta última es la suma de las enerjías cinéticas de todos sus puntos.

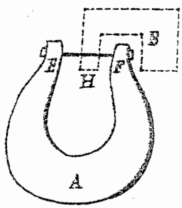
Segun el principio de la conservacion de la enerjía, cuando varios cuerpos chocan unos con otros, las enerjías potenciales i cinéticas se trasforman, en parte, unas en otras i se reparten entre los diferentes cuerpos, de tal manera, que la suma total de las enerjías potenciales i cinéticas de todos los cuerpos conserve el mismo valor, ántes i despues del choque.

Sin embargo, para deducir de este principio una relacion entre las velocidades de los puntos de los diferentes cuerpos, es necesario saber cuál es la variacion que ha sufrido, durante el choque, la enerjía potencial de cada uno de ellos.

Se dice jeneralmente que una parte de la fuerza viva de los cuerpos se pierde durante el choque, sin embargo es fácil de ver que lo contrario puede suceder cuando el choque determina una variacion de la enerjía potencial.

Sea, por ejemplo, un cuerpo elástico A, al reposo, i supongamos que dos de sus puntos E, F esten ligados por un resorte sometido a una tension mui grande; otro cuerpo B en movimiento choca con el cuerpo A i el choque se produce de tal manera que la parte H del cuerpo B corte el resorte; se comprende mui fácilmente que la ruptura del resorte determinará un movimiento de las estremidades E i F del cuerpo A; la parte F chocará con B i dará al cuerpo B cierta percusion; el cuerpo A, por su parte, recibirá una percusion igual i de signo contrario i las fuerzas vivas de los cuerpos tendrán, despues del choque, una suma mayor a la que tenia ántes.

Fig. 26



En este caso, una parte de la enerjía potencial del cuerpo A se ha trasformado en enerjía cinética i ésta última se ha agregado a la que tenian los cuerpos ántes del choque.

Enerjía cinética sólida

Cuando un cuerpo se mueve en el espacio, las cantidades de movimiento de todos sus puntos, en un momento t, son equivalentes a una resultante de traslacion R, aplicada en el centro de gravedad i a un par resultante de eje G. Si en el momento t, el cuerpo estuviera solidificado, los dos vectores R i G bastatarian para determinar completamente el movimiento elemental del sólido invariable en este momento; la enerjía cinética de este sólido hipotético, en el momento t, se llama entónces *enerjía cinética sólida* del cuerpo considerado.

Sea m la masa de uno de los puntos del cuerpo, v su velocidad en el momento t i v_s la velocidad del mismo punto si, en el momento t, el cuerpo estuviera solidificado; sea tambien

$$\overline{v} = \overline{v_s} + \overline{u}$$

u es la velocidad relativa del punto considerado, respecto del sólido invariable hipotético.

De la fórmula precedente se deduce

$$v^2 = v_s^2 + u^2 + 2\ v_s\ u \cos (v_s, u)$$

Luego

$$(8) \qquad \Sigma\ mv^2 = \Sigma\ mv_s^2 + \Sigma\ mu^2 + 2\ \Sigma\ mv_s\ u \cos (v_s, u)$$

El último término del segundo miembro es nulo; en efecto, cuando un sólido invariable es sometido a un sistema de fuerzas en equilibrio, la suma de los trabajos de estas fuerzas, correspondientes a un sistema cualquiera de cambios de lugar virtuales compatibles con las ligazones, es nula.

En el caso actual, los vectores $m\ u$ forman un sistema de vectores en equilibrio, porque los dos vectores mv i mv_s son equivalentes; demos al cuerpo solidificado un cambio de lugar virtual, en el cual cada punto describe un camino virtual $v_s\ \delta t$; el sistema de estos cambios de lugar será compatible con las ligagazones del sólido invariable correspondiente, luego

$$\Sigma\ m\ u\ v_s\ \delta t \cos (v_s, u) = 0$$

I como δt es arbitrario i comun para todos los puntos

$$\Sigma\ m\ u\ v_s \cos (v_s, u) = 0$$

Se tiene por consiguiente, segun (8)

$$\Sigma\ mv^2 = \Sigma\ mv_s^2 + \Sigma\ m\ u^2$$

La espresion $\frac{1}{2}\ \Sigma\ mu^2$ se llama *enerjía cinética interior.*

Llegamos pues a este teorema fundamental:

La enerjía cinética de un cuerpo es la suma de su enerjía cinética sólida i de su enerjía cinética interior.

Cuando varios cuerpos chocan, unos con otros, se puede considerar el conjunto de estos cuerpos como un solo sistema material; durante el choque, se desprecian las fuerzas esteriores i los cambios de lugar relativos de los cuerpos, luego la enerjía cinética sólida de este sistema queda la misma, ántes i despues del choque. Segun el principio de la conservacion de la enerjía, la suma de la enerjía potencial interior i de la enerjía cinética interior del sistema material considerado deberá por consiguiente tambien quedar la misma, ántes i despues del choque.

Supongamos que, despues del choque, los cuerpos queden ligados unos a otros, como en el péndulo balístico; la enerjía cinética interior del sistema habrá desaparecido, luego se habrá producido una cantidad igual de enerjía potencial interior.

Esta enerjía potencial interior podrá manifestarse sea como *enerjía de resorte* o como *enerjía calorífica*, segun los casos.

Así, por ejemplo, cuando un proyectil penetra en un cuerpo de masa mui grande al reposo, la enerjía cinética del proyectil se trasforma en enerjía calorífica i el calor desarrollado es suficiente para fundir a veces el proyectil.

Estos resultados constituyen, bajo una forma distinta, el *principio de Carnot.*

Cuando, por medio del choque, se quiere producir un trabajo mecánico, se debe evitar la pérdida de enerjía cinética interior durante el choque, pues esta última no produce trabajo mecánico sino que deforma los cuerpos que chocan i se trasforma al mismo tiempo en enerjía calorífica.

Aplicacion al hundimiento de los pilotes

Para hacer penetrar un pilote en el suelo, se deja caer sobre él, desde una altura H, un peso P. Al chocar el pilote, el peso P ha adquirido cierta velocidad v i se tiene

$$v = \sqrt{2 g H} \tag{9}$$

Sea p el peso del pilote; despues del choque, el sistema de los dos cuerpos P i p se mueve como un sólido invariable único, i con una velocidad w tal que

$$(P + p)\, w = P v \tag{10}$$

La enerjía cinética del sistema $P + p$, era igual ántes del choque, a

$$\frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 = P H$$

i, despues del choque, a

$$\frac{1}{2}\frac{P+p}{g}w^2 = PH\frac{P}{P+p}$$

Luego la pérdida de enerjía cinética durante el choque es

$$PH - PH\frac{P}{P+p} = PH\frac{p}{P+p}$$

Se ve ya que habrá siempre ventaja a elejir P mui grande respecto de p para disminuir la pérdida de enerjía cinética durante el choque. Del mismo modo hay siempre ventaja en elejir un martillo pesado para evitar la deformacion de los clavos.

En resúmen, el trabajo disponible es $PH\frac{P}{P+p}$ i este trabajo es empleado a hundir el pilote de cierta cantidad h.

Determinacion del peso capaz de producir, sin choque, el misno hundimiento del pilote

No se trata aquí de medir la fuerza del choque, porque, como se ha esplicado mas arriba, el choque debe ser considerado como una percusion, es decir, como una impulsion de fuerza infinita que obra durante un tiempo infinitamente pequeño.

Una vez el choque producido, el sistema, formado por el peso P i el pilote, toma cierta velocidad de traslacion w i esta velocidad es anulada por la resistencia del suelo. Se comprende que se pueda medir aproximativamente esta resistencia, si se conoce el hundimiento h del pilote.

Es lo que haremos en primer lugar: durante el tiempo que demora el pilote para bajar de la cantidad h, se puede considerar la resistencia R al hundimiento como constante; el movimiento del pilote es entónces uniformemente variado. Sea γ la acelaracion de este movimiento, τ la duracion de la bajada; w la velocidad inicial; se tendrá

$$w - \gamma\tau = 0$$

$$h = \frac{1}{2}\gamma\tau^2 = \frac{w^2}{2\gamma}$$

Luego

$$\gamma = \frac{w^2}{2h}$$

La masa del sistema móvil es $\frac{P+p}{g}$, luego

$$R = \frac{P+p}{g}\gamma = \frac{P+p}{g}\ \frac{w^2}{2h}$$

Sea, por otra parte, H la altura de caida del peso P; se tiene, segun (9) i (10)

$$w = \frac{P}{P+p}\ \sqrt{2gH}$$

Luego

$$R = P\ \frac{P+p}{P}\ \frac{H}{h} \tag{11}$$

La fórmula (11) podia obtenerse de otra manera; en efecto despues del choque, el trabajo disponible es

$$PH\frac{P}{P+p}$$

Este trabajo es tambien igual a Rh, luego

$$Rh = PH\frac{P}{P+p}$$

Se obtiene así el mismo valor de R.

Ahora, para que un peso P_0, colocado sin velocidad inicial sobre la cabeza del pilote, lo haga descender, es evidente que P_0 debe ser mayor que R; busquemos cuál es entónces el tiempo de la bajada.

El sistema móvil tiene ahora una masa igual a $\frac{P_0+p}{g}$, la fuerza que lo hace bajar es P_0+p-R, luego la acceleracion γ' del movimiento de bajada es

$$\gamma' = \frac{P_0+p-R}{P_0+p} g = \left(1 - \frac{R}{P_0+p}\right) g$$

Sea τ' el tiempo necesario para que el pilote baje de una cantidad h, se tendrá

$$\tau'^2 = \frac{2h}{\gamma} = \frac{2h}{g} \frac{1}{1 - \frac{R}{P_0+p}}$$

Si P_0+p estuviera igual a R el valor de τ' seria infinito; en este caso en efecto el pilote quedaria en equilibrio; τ' disminuye a medida que P_0 aumenta i el mínimo τ'_m corresponde al caso de P_0 infinito; en este caso

$$\tau'^2_m = \frac{2h}{g}$$

Se ve que τ'_m es el tiempo necesario para que un cuerpo pesado caiga de la altura h; miéntras tanto, en el caso del choque, el tiempo de la bajada es

$$\tau^2 = \frac{2h}{\gamma} = \frac{2h}{g} \left(\frac{P+p}{P}\right)^2 \frac{h}{H} \tag{12}$$

Aplicacion numérica

Se deja caer un peso $P=200$ kilógramos, desde una altura $H=12$ metros, sobre la cabeza de un pilote que pesa $p=100$ kilógramos; determinar la resistencia R del suelo a la penetracion i el tiempo que demora el pilote para bajar.

La fórmula (11) da inmediatamente, para la resistencia R,

$$R = 200 \times \frac{200}{300} \times \frac{12}{0{,}2} = 8{,}000 \text{ kilógramos}$$

La fórmula (12) da ahora

$$\tau^2 = \frac{2 \times 0,2}{9,8} \left(\frac{300}{200} \right)^2 \frac{0,2}{12} = 0,0015$$

$$\tau = 0^s,04$$

Miéntras tanto la duracion mínima de la bajada, en el caso de un peso P_o, colocado sin velocidad inicial, seria

$$\tau'_m = 0^s,2$$

Es cinco veces mayor que τ.

A. OBRECHT.

(Continuará)