MECÁNICA RACIONAL

SEGUNDA PARTE

DE LOS SISTEMAS MATERIALES

(Continuacion)

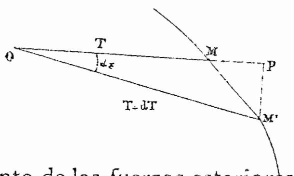
Rozamiento de una cuerda tendida sobre una superficie

Sean F i R las dos fuerzas que obran en las dos estremidades de la cuerda; si estas dos fuerzas son iguales, su valor comun representa la tension de la cuerda; en este caso, se sabe que la tension en todos los puntos queda constante; cada elemento está entónces sometido a una reaccion normal a la superficie i la forma de equilibrio de la cuerda es la de una línea jeodésica de la superficie.

Supongamos ahora que F aumenta progresivamente; el rozamiento de la superficie impedirá el movimiento de la cuerda i el equilibrio se mantendrá hasta que la diferencia entre las tensiones T i $T+dT$, que obran en las estremidades de cada elemento, sea igual al producto de la reaccion normal de la superficie por el coeficiente f del rozamiento.

En esta situacion límite, cada elemento de la cuerda está sometido a dos fuerzas esteriores: la reaccion normal dN i el rozamiento fdN.

Fig. 55



Consideremos la curva de las fuerzas: sea (fig. 55) O el polo, OM i OM' dos radios polares infinitamente próximos i $d\epsilon$ el ángulo MOM'; los radios OM i OM' representan las tensiones T i $T+dT$ en las estremidades del elemento conjugado de la cuerda, i el elemento MM' es la resultante de las fuerzas esteriores: $MP=fdN$ i $PM'=dN$ que obran sobre este elemento.

Se tiene ahora, en la fig. (55).

$$fdN=(T+dT)\cos d\epsilon-T=dT$$

$$dN=(T+dT)\operatorname{sen} d\epsilon=Td\epsilon$$

Luego

$$f=\frac{dT}{Td\epsilon}$$

O bien

$$\frac{dT}{T}=fd\epsilon$$

$$LT=f\epsilon+LC$$

I finalmente

$$T=Ce^{f\epsilon}$$

Consideremos, como direccion inicial la de la fuerza R i sea θ el ángulo que hace F con R, tendremos:

1.º para $\epsilon=0$

$$R=C$$

2.° para $\epsilon = \theta$

$$F = Ce^{f\theta}$$

Luego

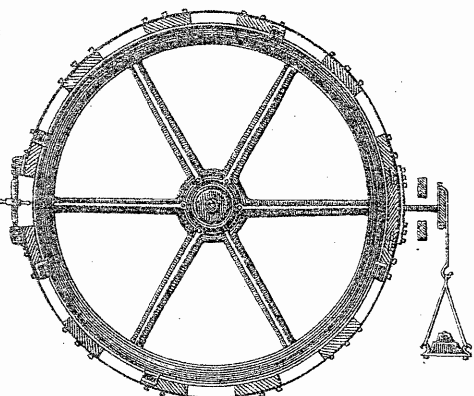
$$F = Re^{f\theta}$$

Tal es la relacion que ligan las dos fuerzas F i R cuando la cuerda está al punto de resbalar sobre la superficie.

MEDIDA PRÁCTICA DE LA POTENCIA DE UNA MÁQUINA
FRENO DE PRONY

Describiremos aquí la modificacion adoptada por *Kretz* del freno antiguo de Prony. El freno de Kretz (fig. 56) se compone de una serie de pedazos de madera (una docena mas o ménos) repartidos sobre la circunferencia del volante i unidos unos a otros por una cintura metálica; un tornillo situado sobre la horizontal del centro permite desarrollar una presion variable entre los pedazos de madera i el volante; opuesto al tornillo i en la otra estremidad del mismo diámetro horizontal se encuentra una corta barra metálica, dirijida segun este diámetro i destinada a soportar un platillo; el freno, sin el platillo, está equilibrado al rededor del eje del volante; encima i abajo de esta barra se encuentran dos tacos que impiden la rotacion del freno.

Fig. 56



Para medir la potencia de una máquina se suprimen todas las resistencias i se coloca el freno sobre el volante; como el freno no puede jirar con el volante se desarrolla un rozamiento proporcional a la presion del freno. Se regla esta presion de tal modo que el volante tenga una velocidad angular igual a la que tenia antes que se suprimieran las resistencias.

Una vez este reglaje obtenido, el trabajo de la máquina consiste simplemente en vencer el rozamiento del freno; para evaluarlo se coloca en el platillo pesos convenientes hasta que el freno esté en equilibrio, es decir, hasta que la barra horizontal oscile libremente entre los dos tacos.

Sea P el peso necesario para obtener el equilibrio i a la distancia horizontal del platillo al eje de rotacion, S la suma de los momentos, respecto a este eje, de las fuerzas de rozamiento; se tendrá, en el caso del equilibrio

$$Pa = S$$

En esta fórmula el peso P comprende el peso del platillo puesto que el freno esta equilibrado, al rededor del eje, sin el platillo.

Sea ahora C la potencia de la máquina, avaluada en caballos vapor, N el número de vueltas del volante durante un minuto; la velocidad angular del volante es

$$\omega = \frac{2\pi N}{60}$$

i el trabajo efectuado durante un segundo es

$$S\omega$$

Luego

$$C = \frac{S\omega}{75} = \frac{2\pi}{60 \times 75} P a N$$

En esta fórmula: P es la suma del peso del platillo i de los pesos colocados en él; a es la distancia horizontal del platillo al eje, i N el número de vueltas del volante por minuto.

CAPÍTULO XV

PRESIONES I TENSIONES EN EL INTERIOR DE LOS CUERPOS EN EQUILIBRIO SÓLIDO

HIDROSTÁTICA

Como se ha esplicado mas arriba (cap. X), las presiones i tensiones interiores de un cuerpo en equilibrio sólido son, por definicion, las presiones i tensiones de las barras hipotéticas que unen los puntos de un sólido invariable, equivalente al cuerpo considerado i sometido a las mismas fuerzas exteriores.

En el capítulo X, se ha determinado solo el sistema mas sencillo equivalente a las presiones i tensiones de las barras hipotéticas que atraviesan una seccion completa del cuerpo. Se trata ahora de hacer la misma determinacion para un elemento plano cualquiera, situado en el interior del cuerpo.

El método jeneral para determinar una fuerza de *ligazon* consiste en suponer la ligazon suprimida i reemplazada por la fuerza equivalente; se da entónces al cuerpo un cambio de lugar virtual, compatible con los ligazones restantes i, si este cambio de lugar hace trabajar la fuerza de ligazon incógnita, se escribe que la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas esteriores i de la fuerza de ligazon es igual a cero; se obtiene así una ecuacion que determina completamente la fuerza de ligazon buscada

Este método no conduce al resultado en el caso actual; en efecto, si se cortan las barras hipotéticas que atraviesan un elemento plano, los puntos del cuerpo situados a uno i otro lado del elemento considerado, quedan jeneralmente ligados a los demas, luego un cambio de lugar virtual, compatible con las ligazones restantes, no hace trabajar la fuerza de ligazon buscada i ésta no se puede determinar.

Es necesario, por consiguiente, hacer alguna hipótesis sobre la constitucion interna de los cuerpos para poder resolver este problema.

En los sólidos naturales no se sabe cual es la distribucion de la materia al rededor de cada punto, pero, en los fluidos en equilibrio sólido, es lójico de admitir que la reparticion de las moléculas al rededor de un punto cualquiera i a distancia infinitamente pequeña de él, es perfectamente uniforme. Como consecuencia se deberá admitir tambien que, en el sólido invariable equivalente, la distribucion de las barras hipotéticas es perfectamente simétrica al rededor de cada punto i a distancia infinitamente pequeña de él.

Estas consideraciones se aplican indiferentemente a los líquidos i a los gases en equilibrio sólido i a la determinacion de las presiones en el interior de estos cuerpos constituye la *hidrostática.*

Por definicion, un cuerpo en equilibrio sólido, puede estar en reposo o animado de un movimiento de sólido invariable, ademas este segundo caso puede tratarse conjuntamente con el primero, con la condicion de agregar, a las fuerzas esteriores, las fuerzas de inercia conocidas de todos los puntos.

Consideremos, por consiguiente, un fluido en reposo: las presiones de las barras hipotéticas que, en el sólido invariable equivalente, atraviesan un elemento de área plana $d\omega$, situado en M, serán, por razon de simetría, equivalentes a una resultante única, normal al elemento $d\omega$; por otra parte, si el elemento $d\omega$ toma otra orientacion al rededor de M, la reparticion de las barras hipoteticas, respecto del elemento plano, quedará exactamente la misma como ántes; luego, la nueva presion resultante, normal al elemento, debe tambien quedar la misma como ántes.

Estas consecuencias lójicas de la hipótesis hecha sobre lo constitucion interna de los fluidos no se pueden demostrar i constituyen el *principio de Pascal.*

Presion en un punto

La presion resultante sobre el elemento $d\omega$ debe tender hácia cero al mismo tiempo que $d\omega$; su razon a $d\omega$ debe tender hácia un límite determinado p cuando $d\omega$ termina hácia cero; como, segun el principio de Pascal, el limite p es independiente de la orientacion del elemento $d\omega$ al rededor de M, se dice que p es la *presion hidrostática del fluido en el punto M.*

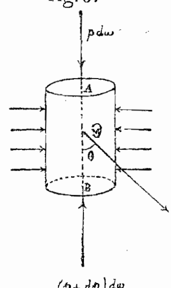
La presion, asi definida, tiene las dimensiones del cociente de una fuerza por una área; sin embargo si, en todos los puntos de una área plana igual a la unidad, la presion p es constante, su valor representa la fuerza equivalente a las presiones de las barras hipotéticas que atreviesan esta unidad de área. Es algo análogo a lo que pasa en el caso de la velocidad; ella representa un camino, cuando el movimiento es uniforme i el tiempo igual a la unidad.

En resúmen, si p es la presion de un fluido en un punto M i $d\omega$ un elemento de área, situado en este punto, la resultante de las presiones de las barras hipotéticas que atraviesan el elemento $d\omega$, es igual a $pd\omega$.

Variacion de la presion en el interior de un fluido en reposo

Consideremos, en el interior del fluido (fig. 57), un cilindro infinitamente pequeño, limitado por dos planos perpendiculares a sus jeneratrices; sea $d\omega$ el área comun de las dos bases i dx la altura; A i B los centros de gravedad de las dos bases i C el centro de gravedad del volúmen del cilindro; como la materia contenida en el interior del cilindro puede ser considerada siempre como homojénea, su centro de gravedad será tambien el punto C; sea ademas ρ la densidad del fluido i m la masa de la materia contenida en el cilindro, se tendrá

Fig. 57



$$(1) \qquad m = \rho\, d\,\omega\, dx$$

El punto material así aislado en el interior del fluido, es sometido a dos clases de fuerzas: 1.º las presiones de las barras hipotéticas que lo ligan a los demas puntos del fluido; 2.º las fuerzas esteriores.

1.º La presion del fluido, en un punto cualquiera, debe ser una funcion contínua de las coordenadas de este punto; podemos, por consiguiente, designar por p i $p+dp$ las presiones en A i B; las presiones de las barras que encuentran la base A serán, por consiguiente, equivalentes a una fuerza $p\,d\omega$, normal a la seccion considerada; del mismo modo la base B será sometida a una fuerza resultante $(p+dp)\,d\omega$, normal a la seccion B; finalmente las presiones que obran al rededor del cilindro son equivalentes a fuerzas normales a las jeneratrices.

2.° Sea γ la aceleracion que las fuerzas esteriores darian a un punto material situado en C i aislado en el espacio; como la acceleracion γ debe variar de una manera contínua, la accion resultante de las fuerzas esteriores sobre la masa del cilindro será equivalente a una fuerza $m\gamma$ paralela γ; sea θ su ángulo con las jeneratrices del cilindro.

El fluido, es por hipótesis, en reposo; luego, la suma de las proyecciones sobre un eje cualquiera, de las fuerzas que obran sobre el cilindro elemental, debe ser igual a cero; proyectemos estas fuerzas sobre la direccion de las jeneratrices del cilindro, las presiones laterales darán una suma igual a cero, luego

$$m\gamma\cos\theta+p\,d\omega-(p+dp)\,d\omega=0$$

O bien, si se reemplaza m por su valor (1)

$$\rho\gamma\,d\omega\,dx\cos\theta-dp\,d\omega=0$$

O todavia

$$dp=\rho\,\gamma\,dx\cos\theta \tag{2}$$

Esta fórmula es independiente de $d\omega$ i queda la misma si las dimensiones de $d\omega$ son infinitamente pequeñas respecto de dx; en este caso, el cilindro toma el aspecto de una simple recta i la fórmula (2) da la variacion de la presion del fluido en los puntos de esta recta.

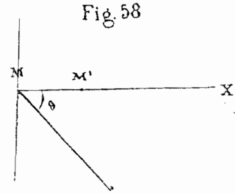
Sea, por ejemplo, M un punto del fluido, MX una recta que pasa por este punto, la variacion dp de la presion, cuando M pasa en M' es dado por la fórmula (2).

Esta fórmula es idéntica a la que se ha obtenido en otro capítulo para espresar la variacion de enerjía, al rededor de M, del medio activo que enjendra las fuerzas esteriores.

Asi la variacion de la presion en el interior de una masa fluida en equilibrio es ligada a las fuerzas esteriores de la misma manera como la variacion de enerjía del medio activo que enjendra estas fuerzas esteriores, está ligada a ellas.

Consideremos, por ejemplo, las superficies equipotenciales; la enerjia potencial del medio activo es constante sobre estas superficies, luego tambien, en la masa fluida en equilibrio, la presion debe quedar constante sobre estas superficies, de ahí el nombre de superficies de nivel dado a las superficies equipotenciales.

Fig. 58



La demostracion de esta propiedad es una consecuencia directa de la fórmula (2); en efecto, en los puntos de una superficie de nivel, la acceleracion γ es normal a esta superficie, luego si el punto M' (fig, 58), está situado en la superficie de nivel que pasa por M, el ángulo θ es recto i se tiene

$$dp = 0$$

La presion en M' es por consiguiente igual a la presion en M.

En resúmen, si una masa fluida está en equilibrio sólido, las superficies de nivel son normales en cada uno de sus puntos a la resultante de las fuerzas esteriores que obran en este punto i, en los puntos de una misma superficie de nivel, la presion es constante.

Recíprocamente, para que un fluido pueda quedar en equilibrio sólido, bajo la accion de cierto sistema de fuerzas esteriores, es necesario que estas fuerzas tengan un potencial.

Ecuacion jeneral de la hidrostática

Esta ecuacion se deduce de la fórmula (2). Consideremos un sistema de tres ejes rectangulares i sean x, y, z las coordenadas de un punto M del fluido, ρ la densidad i p la presion en este punto; sea tambien γ la aceleracion que las fuerzas esteriores darian a un punto material aislado en el espacio i situado en M; $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$, las tres proyecciones de γ sobre los tres ejes. Cuando x varia de dx, el punto M viene en M' i la variacion correspondiente de la presion es, segun (2)

$$dp = \rho\,\gamma\,dx\cos\theta = \rho\,\gamma_x\,dx$$

Ahora la presion p es una funcion de x, y, z i cuando una sola coordenada x varía de dx se tiene

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

Luego

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx = \rho \gamma_x dx$$

O bien

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \gamma_x$$

Del mismo modo

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \gamma_y$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \gamma_z$$

Finalmente, la variacion total dp de la presion, cuando x, y, z se cambian en $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ es

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

O bien

(3) $$dp = \rho (\gamma_x dx + \gamma_y dy + \gamma_z dz)$$

Una superficie de nivel es definida por la condicion

$$dp = 0$$

Luego, en los puntos de una cualquiera de ellas, se tiene

(4) $$\gamma_x dx + \gamma_y dy + \gamma_z dz = 0$$

Esta es la ecuacion diferencial de las superficies de nivel; se vé que en un punto cualquiera del fluido la aceleracion γ es normal a la superficie de nivel que pasa por este punto.

APLICACION A LOS FLUIDOS PESADOS

En el caso de la pesantez, la aceleracion γ es vertical e igual a la gravedad g; luego, si los ejes se elijen de tal manera que OZ sea vertical i dirijido hácia abajo, se tiene

$$\gamma_x = 0 \ , \ \gamma_y = 0 \ , \ \gamma_z = g$$

La ecuacion diferencial de las superficies de nivel es entónces

$$\gamma_x \, dx + \gamma_y \, dy + \gamma_z \, dz = g \, dz = 0$$

Luego, estas superficies tienen por ecuacion jeneral

$$gz = C$$

O simplemente

$$z = \text{Const.}$$

Son planos horizontales.

La presion p en un punto cualquiera será determinada por la ecuacion diferencial.

$$dp = \rho g dz \tag{5}$$

Líquidos.

En los líquidos la densidad ρ es constante en todos los puntos, luego

$$p = \rho g z + \text{Const.}$$

O bien, si p_0 es la presion cuando $z = z_0$,

$$p = p_0 + \rho g (z - z_0)$$

Se representa jeneralmente el producto ρg por la letra Π i ésta representa entónces el *peso* de la unidad de volúmen del líquido; sea tambien $z-z_0=h$, se tendrá

$$p=p_0+\Pi h \tag{6}$$

Así, la presion en un punto de un líquido es igual a la presion en otro punto, mas el peso de una columna líquida de base igual a la unidad i de altura igual a la diferencia de nivel entre los dos puntos.

Gases

En los gases, la densidad es ligada a la presion i a la temperatura por la fórmula de Gay-Lussac

$$p=K\rho(1+\alpha t) \tag{7}$$

K es una constante, t la temperatura en grados centígrados i α el coeficiente de dilatacion, igual a 0,00367.

Supongamos la temperatura constante e igual a t_0, la fórmula (5) nos dará

$$dp=\frac{p}{K(1+\alpha t_0)}g\,dz$$

O bien

$$\frac{dp}{p}=\frac{g\,dz}{K(1+\alpha t_0)}$$

$$Lp=\frac{gz}{K(1+\alpha t_0)}+\text{Const.}$$

Luego si p_0 es la presion cuando $z=z_0$.

$$Lp-Lp_0=\frac{g(z-z_0)}{K(1+\alpha t_0)}$$

O bien

$$p=p_0 e^{\frac{g}{K}(z-z_0)}$$

Medida de las alturas por medio de observaciones barométricas

Estableceremos aquí la fórmula empleada en la práctica: sea h la distancia entre dos estaciones; z_0 i z_1 sus alturas respectivas encima del nivel del mar; θ_0 i θ_1 las temperaturas i p_0 i p_1 las presiones en estos dos puntos; R el radio de la Tierra.

La acceleracion γ de la fórmula jeneral (5), es todavía vertical e igual a la gravedad, pero en el caso de grandes diferencias de altura es necesario tomar en cuenta la variacion de la gravedad con la altura.

Sea g la gravedad en el lugar considerado i en el nivel del mar; su valor a una altura z será

$$g\frac{R^2}{(R+z)^2}=g\left(1-\frac{2z}{R}\right)$$

Se desprecia $\frac{z^2}{R^2}$ delante de la unidad; supondremos ahora el eje OZ vertical i dirijido hácia arriba; las fórmulas (5) i (7) dan entónces

$$(8) \qquad dp=\frac{-p}{K(1+\alpha\theta)}g\left(1-\frac{2z}{R}\right)dz$$

Como no se conoce exactamente la lei de variacion de la temperatura con la altura, se adopta para θ un término medio entre las temperaturas θ_0 i θ_1; ademas para tomar en cuenta la humedad del aire se reemplaza el coeficiente de dilatacion α por un valor un poco mayor 0,004; en resúmen se supone simplemente θ constante i se escribe

$$(9) \qquad \alpha\theta=0{,}002\,(\theta_0+\theta_1)$$

La integracion de la fórmula (8) da entónces

$$Lp=\frac{-g}{K(1+\alpha\theta)}\left(z-\frac{z^2}{R}\right)+C$$

Luego

$$L\frac{p_0}{p_1}=\frac{gh}{K(1+\alpha\theta)}\left(1-\frac{z_1+z_0}{R}\right)$$

En jeneral, la distancia z_0, de la estacion inferior al nivel del mar, es pequeña i su cociente por R es insensible; se puede entónces, en la parentésis, reemplazar simplemente z_1+z_0 por h i se tiene

$$h\left(1-\frac{h}{R}\right)=\frac{K(1+\alpha\theta)}{g}L\frac{p_0}{p_1} \tag{10}$$

La gravedad g en el nivel del mar varía tambien con la latitud del lugar i se tiene en un lugar de latitud λ

$$g=9^{m},806\,(1-0{,}00255\cos 2\lambda)$$

Ademas, en Paris, en donde $g=9{,}8088$, Regnault ha obtenido, para el peso de un metro cúbico de aire a cero grado i a la presion de 760 milímetros de mercurio, el valor 1 kg., 2932, luego

$$\rho=\frac{1{,}2932}{9{,}8088}$$

Por otra parte, el peso de una columna de 760 mm. de mercurio, de base igual a un metro cuadrado, equivale a

$$p=10333\ \text{Kg.}$$

Luego

$$K=\frac{10333}{1{,}2932}\times 9{,}8088$$

Si se reemplazan estas cantidades por sus valores en la fórmula (10), i si se reemplazan tambien los logaritmos neperianos por los logaritmos vulgares, se obtiene

$$h\left(1-\frac{h}{R}\right)=\frac{18409\,(1+\alpha\theta)}{1-0{,}00255\cos 2\lambda}\log\frac{p_0}{p_1}$$

Un valor aproximado de h es

$$h = 18409 \log \frac{p_0}{p_1}$$

Se puede sustituir este valor en la parentésis que multiplica h i queda entónces la fórmula práctica

$$(11) \quad \begin{cases} h = 18409^{\text{m}} (1 + x) \log \dfrac{p_0}{p_1} \\ x = 0{,}002 (\theta_0 + \theta_1) + 0{,}00255 \cos 2\lambda + 0{,}0029 \log \dfrac{p_0}{p_1} \end{cases}$$

En estas fórmulas, p_0 i p_1 son las presiones barométricas observadas en las dos estaciones; θ_0 i θ_1 las temperaturas centígradas; λ la latitud del lugar de observacion.

Principio de Arquímedes

Consideremos un volúmen cualquiera finito en el interior de un fluido pesado en equilibrio i sustituimos al fluido contenido en este volúmen el sólido invariable equivalente; este sólido estara sometido a la accion de la pesantez i a las presiones que obran en su superficie; todas estas fuerzas se hacen equilibrio, luego el conjunto de las presiones es equivalente a una fuerza vertical igual i de sentido contrario al peso de la masa fluida considerada i aplicada en su centro de gravedad.

Reemplacemos ahora la masa fluida solidificada por un cuerpo cualquiera, de forma esterior exactamente igual; el conjunto de las presiones ejercitadas sobre este cuerpo por el fluido que lo envuelve, será tambien equivalente a la misma fuerza vertical, luego se puede decir: *todo cuerpo, sumerjido en un fluido, pierde una parte de su peso igual al peso del fluido desplazado.*

Tal es el *principio de Arquímedes.*

La demostracion anterior es debida a *Steven:* es la mas sencilla de todas, pero, como las demas demostraciones, basadas sobre las fórmulas de presiones, ella no toma en cuenta las acciones moleculares.

Sin embargo, basta admitir que las acciones moleculares obran solo entre los puntos mui próximos i son análogas a una presion normal constante, para que el principio de Arquímedes sea rigorosamente exacto en el caso de los cuerpos completamente sumerjidos.

Estableceremos, en efecto, la siguiente propiedad:

A. OBRECHT

(Continuará)