CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

(Continuacion)

CAPÍTULO IX

APLICACIONES DE LA FÓRMULA DE TAYLOR

Desarrollo de las funciones de un número cualquiera de variables

Consideremos, en primer lugar, la funcion de dos variables

$$f(u, v)$$

Se trata de desarrollar la espresion

$$f(u+h, v+k)$$

segun las potencias de h i k.

El método mas sencillo consiste a considerar la funcion

$$(1) \qquad F(t) = f(u + ht,\ v + kt)$$

de la variable t; esta funcion es igual a $f(u+h,\ v+k)$ cuando t es igual a uno; por otra parte se tiene

$$(2) \quad F(t) = F(o) + \frac{t}{1} F'(o) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} F''(o) + \dots + \frac{t^n}{1 \cdot 2 \dots n} F^n(o) + \dots$$

Pongamos

$$(3) \qquad \begin{cases} u + ht = u' \\ v + kt = v' \end{cases}$$

Se tendrá

$$F'(t) = \frac{df}{du'} h + \frac{df}{dv'} k$$

$$F''(t) = \frac{d^2 f}{du'^2} h^2 + 2 \frac{d^2 f}{du' dv'} hk + \frac{d^2 f}{dv'^2} k^2$$

En jeneral, segun lo espuesto en el capítulo II, la espresion de $F^n(t)$ puede escribirse bajo la forma figurada

$$F^n(t) = \left(\frac{df}{du'} h + \frac{df}{dv'} k \right)^n$$

a la condicion de reemplazar, despues del desarrollo del binomio, un término tal como

$$A \left(\frac{df}{du'} \right)^p \left(\frac{df}{dv'} \right)^q h^p k^q$$

por el siguiente

$$A \frac{d^{p+q} f}{du'^p dv'^q} h^p k^q$$

Calculemos los valores de $F(o)$, $F'(o)$,..... que figuran en el segundo miembro de (2). Se tiene, segun (1),

$$F(o)=f(u, v)$$

Ahora, cuando se hace $t=o$ en las espresiones de las derivadas $F'(t)$, $F''(t)$......, los variables u', v', definidas por (3), se reducen simplemente a u, v; se tiene, por consiguiente,

$$F'(o)=\frac{df}{du}h+\frac{df}{dv}k$$

$$F''(o)=\frac{d^2f}{du^2}h^2+2\frac{d^2f}{du\,dv}hk+\frac{d^2f}{dv^2}k^2$$

i, de una manera jeneral i figurada,

$$F^n(o)=\left(\frac{df}{du}h+\frac{df}{dv}h\right)^n$$

Hagamos finalmente $t=1$ en la ecuacion (2), obtendremos

$$f(u+h, v+k)=f(u, v)+h\frac{df}{du}+k\frac{df}{dv}+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{h^2\frac{d^2f}{du^2}+2hk\frac{d^2f}{du\,dv}+k^2\frac{d^2f}{dv^2}\right\}+......$$

$$......+\frac{1}{1\cdot2\ldots n}\left(h\frac{df}{du}+k\frac{df}{dv}\right)^n+......$$

Esta es la fórmula buscada, en efecto el segundo miembro es un desarrollo ordenado segun las potencias de h i k.

El mismo método puede aplicarse en el caso del desarrollo de una funcion de un número cualquiera de variables i se obtiene

$$f(u+h, v+k, w+l\ldots.) = f(u.\,v,\, w,\ldots.)$$
$$+\left(h\frac{df}{du}+k\frac{df}{dv}+l\frac{df}{dw}+\ldots.\right)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots.n}\left(h\frac{df}{du}+k\frac{df}{dv}+l\frac{df}{dw}+\ldots.\right)^{n}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

El término jeneral del segundo miembro se ha escrito bajo una forma figurada, análoga a la que se ha empleado mas arriba, en el caso de dos variables.

Representemos por Δf el incremento de la funcion f, cuando $u, v\ldots.$ tienen los incrementos $h, k,\ldots.$; la fórmula anterior puede tambien escribirse

$$\Delta f = df + \frac{1}{1.2}d^2 f + \ldots.. + \frac{1}{1.2\ldots n}d^n f + \ldots.$$

Esta fórmula jeneral es comun a todas las funciones, cualquiera que sea el número de las variables i cada diferencial $d^n f$ representa, en el desarrollo, la reunion de todos los términos del órden n de pequeñez.

Desarrollo de las funciones implícitas

Sea la funcion

(4) $$F(x, y)=0$$

Para desarrollar y segun las potencias crecientes de x se empleará la fórmula de Mac Laurin dándole la forma

(5) $$y = y_0 + \frac{x}{1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots.$$

El índice cero significa que la funcion y i sus derivados tienen los valores que corresponden a $x=0$.

El valor de y_0 se deducirá de la ecuacion (4), haciendo en ella $x=0$. Ahora, la misma ecuacion da

$$(6) \qquad \frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\,\frac{dy}{dx}=0$$

De ahí se deducirá $\frac{dy}{dx}$ i, por consiguiente tambien $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$. Al derivar la ecuacion (6), respecto a x, se obtiene en seguida

$$\frac{d^2F}{dx^2}+2\,\frac{d^2F}{dx\,dy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{dF}{dy}\,\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

Esta ecuacion dará el valor de $\frac{d^2y}{dx^2}$, luego se podrá calcular $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$.

De la misma manera se podrán calcular los derivadas consecutivas de y respecto a x i, por consiguiente, se conocerán todos los coeficientes del desarrollo (5).

Las operaciones se hacen mas largas, a medida que el órden de la derivada va aumentando; por otra parte, no se conoce la lei que permite calcular directamente $\frac{d^ny}{dx^n}$ en funcion de las derivadas parciales de la funcion F, de suerte que, en jeneral, no se sabe cuál es el valor de la resta cuando se han calculado n términos de la série (5).

Sin embargo, hai un caso en que se obtiene fácilmente la lei que siguen las derivadas consecutivas; sea la funcion

$$F(x, y, a)=0$$

i supongamos que las derivadas parciales de y respecto x i al parametro a satisfacen a la relacion

$$(7) \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \phi(y) \frac{\partial y}{\partial a}$$

Si esta condicion es satisfecha se tiene, de una manera jeneral,

$$(8) \qquad \frac{\partial \left[\Psi(y) \frac{\partial y}{\partial a} \right]}{\partial x} = \frac{\partial \left[\Psi(y) \frac{\partial y}{\partial x} \right]}{\partial a}$$

En efecto, el valor comun de los dos miembros es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a \partial x} \Psi(y) + \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial x} \Psi'(y)$$

Se tiene entónces, segun (7) i (8),

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial \left[\phi(y) \frac{\partial y}{\partial a} \right]}{\partial x} = \frac{\partial \left[\phi(y) \frac{\partial y}{\partial x} \right]}{\partial a} = \frac{\partial \left[\phi(y)^2 \frac{\partial y}{\partial a} \right]}{\partial a}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 \left[\phi(y)^2 \frac{\partial y}{\partial a} \right]}{\partial a\, \partial x} = \frac{\partial^2 \left[\phi(y)^2 \frac{\partial y}{\partial x} \right]}{\partial a^2} = \frac{\partial \left[\phi(y)^3 \frac{\partial y}{\partial a} \right]}{\partial a^2}$$

La lei es evidente i se tiene de una manera jeneral

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1} \left[\phi(y)^n \frac{\partial y}{\partial a} \right]}{\partial a^{n-1}}$$

Sea ahora y_0 el valor de y que corresponde a $x=0$; como x i a deben ser considerados como variables independientes, se podrá en las derivadas, respecto a a, hacer $x=0$ ántes de hacer la derivacion, se tiene entónces

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 = \phi(y_0)\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_0$$

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{\partial\left[\phi(y_0)^2\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_0\right]}{\partial a}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_0 = \frac{\partial^{n-1}\left[\phi(y_0)^n\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_0\right]}{\partial a^{n-1}}$$

La fórmula (5) da entónces

$$y=y_0+\frac{x}{1}\,\phi(y_0)\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_0+\frac{x^2}{1.2}\,\frac{\partial\left[\phi(y_0)^2\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_0\right]}{\partial a}+\cdots\cdots$$

Fórmula de Lagranje

Consideremos las ecuaciones

$$(9)\qquad \begin{cases} y=F(z) \\ z=a+x\,\psi(z) \end{cases}$$

La eliminacion de z daria una ecuacion entre x, y, i el parametro a. La condicion (7) es satisfecha en este caso; se tiene en efecto

$$\frac{\partial z}{\partial a}=1+x\,\psi'(z)\,\frac{\partial z}{\partial a}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\psi(z)+x\,\psi'(z)\,\frac{\partial z}{\partial x}$$

Por consiguiente

$$\frac{\partial z}{\partial a}=\frac{1}{1-x\,\psi'(z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\psi(z)}{1-x\,\psi'(z)}$$

De ahí se deduce

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\psi(z)\,\frac{\partial z}{\partial a}$$

Ahora

$$\frac{\partial y}{\partial a}=F'(z)\,\frac{\partial z}{\partial a}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=F'(z)\frac{\partial z}{\partial x}$$

Luego tambien

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\psi(z)\,\frac{\partial y}{\partial a}$$

O bien, como z es una funcion de y,

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\phi(y)\,\frac{\partial y}{\partial a}$$

Esta es precisamente la relacion (7).
Se tiene ahora, cuando $x=0$,

$$z_0=a,\quad \left(\frac{dz}{da}\right)_0=1$$

$$y_0=F(z_0)=F(a)$$

$$\phi(y_0)=\psi(z_0)=\psi(a)$$

$$\left(\frac{dy}{da}\right)_0=F'(z_0)\left(\frac{dz}{da}\right)_0=F'(a)$$

Luego

$$(10)\quad y=F(z)=F(a)+\frac{x}{1}\psi(a)F'(a)+\frac{x^2}{1.2}\,\frac{d\left[\psi(a)^2F'(a)\right]}{da}$$

$$+\frac{x^3}{1.2.3}\,\frac{d^2\left[\psi(a)^3F'(a)\right]}{da^2}+\ldots\ldots$$

Esta es la fórmula de Lagranje.

La fórmula de Lagranje tiene numerosas aplicaciones en la astronomía; por ejemplo, cuando se quiere calcular el radio vector r de un planeta, se encuentran las ecuaciones

$$\frac{r}{a}=1-e\cos u$$

$$u=m+e\operatorname{sen} u$$

En estas fórmulas a es el semi eje mayor, e la escentricidad, m la anomalía media i u la anomalía escéntrica.

Como m varia proporcionalmente al tiempo, es cómodo, en la práctica, espresar directamente r en funcion de m; para esto, se aprovecha la circunstancia de que e es pequeño i se aplica la fórmula de Lagranje. El desarrollo se ordena entónces segun las potencias crecientes de e. Segun esto se hará, en las fórmulas (9) i (10),

$$z=u \qquad \psi(z)=\operatorname{sen} z$$

$$x=e \qquad F(z)=1-e\cos z$$

$$a=m$$

La fórmula (10) da entónces

$$\frac{r}{a}=1-e\cos u=1-e\cos m+\frac{e^2}{1}\operatorname{sen}^2 m$$

$$+\frac{e^3}{1.2}\,\frac{d(\operatorname{sen}^3 m)}{dm}+\frac{e^4}{1.2.3}\,\frac{d^2(\operatorname{sen}^4 m)}{dm^2}+\ldots..$$

Valor de las espresiones que se presentan bajo una fórma indeterminada.

Supongamos que los dos términos de una fraccion

$$\frac{f\,(x)}{\phi\,(x)}$$

se reducen a cero, cuando x tiene cierto valor a; se trata de buscar el límite hácia el cual tiende esta fraccion cuando x se aproxima indefinidamente hácia a.

Si el valor $x = a$ no es una abcisa crítica de las dos funciones $f\,(x)$ i $\phi\,(x)$ se puede reemplazar en ellas x por $a+h$ i desarrollar segun el teorema de Taylor; se tiene entónces

$$\frac{\phi\,(a+h)}{\phi\,(a+h)} = \frac{f\,(a)+h f'\,(a)+\frac{h^2}{1.2}\,f''\,(a)+\ldots\ldots}{\phi\,(a)+h\,\phi'\,(a)+\frac{h^2}{1.2}\,\phi''\,(a)+\ldots\ldots}$$

Si $f\,(a)$ i $\phi\,(a)$ son nulos, h es factor comun en los dos términos, luego

$$\frac{f\,(a+h)}{\phi\,(a+h)} = \frac{f'\,(a)+\frac{h}{1.2}\,f''\,(a)+\ldots\ldots}{\phi'\,(a)+\frac{h}{1.2}\,\phi''\,(a)+\ldots\ldots}$$

Cuando x tiende hácia a, h tiende hácia cero i se tiene evidentemente

$$\lim \frac{f\,(x)}{\phi\,(x)} = \frac{f'\,(a)}{\phi'\,(a)}$$

Tal es por consiguiente el valor buscado.

Si las dos derivadas $f'\,(a)$ i $\phi'\,(a)$ son tambien nulas la misma regla dà

$$\lim \frac{f\,(x)}{\phi\,(x)} = \frac{f''\,(a)}{\phi''\,(a)}$$

i asi en seguida

Se pide su límite cuando x tiende hácia cero. Lo mas sencillo es de despreciar x^2, entónces la espresion se reduce a

$$\sqrt{a} \quad \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$$

El límite buscado es por consiguiente $\sqrt{a}$.

CAPÍTULO X

MÁXIMA I MÍNIMA

Funciones de una variable

Una funcion $f(x)$ es *máxima*, para $x=a$, cuando $f(a)$ es mayor que $f(a+h)$. cualquiera que sea el signo de la cantidad infinitamente pequeña h. Al contrario $f(x)$ es *mínima*, para $x=a$, cuando, en las mismas condiciones, $f(a)$ es menor que $f(a+h)$.

Es fácil de ver que la condicion comun al máximo i al mínimo es que la primera derivada de la funcion sea nula; en efecto, se sabe que $f(x)$ crece cuando la derivada $f'(x)$ es positiva i disminuye cuando $f'(x)$ es negativa; segun esto, en los dos casos del máximo i del mínimo $f'(x)$ debe cambiar de signo cuando x pasa por el valor a; esto exije que $f'(a)$ sea igual a cero.

Para distinguir el máximo del mínimo se puede observar que, en el caso del máximo, $f'(x)$ es positivo cuando x es menor que a i negativo en seguida, luego $f'(x)$ disminuye a medida que x crece i la derivada $f''(a)$ es negativa; al contrario, en el caso del mínimo, $f''(a)$ es positiva.

Si $f'(a)$ i $f''(a)$ son nulos a la vez no se puede distinguir el

Sea, por ejemplo, la fraccion

$$\frac{Lx}{x-1}$$

os dos términos se hacen cero cuando $x=1$; en este caso la razon entre las derivadas es

$$\frac{\frac{1}{x}}{1}$$

i, para $x=1$, esta fraccion es igual a uno; luego el límite buscado es uno.

En jeneral, lo mas sencillo consiste en aplicar directamente la fórmula de Taylor. Así, si se pide el límite, para $x=0$, de la fraccion

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}.$$

la regla jeneral obligaria a escribir tres derivadas consecutivas; miéntras tanto si se reemplazan las dos funciones tg x i sen x por sus desarrollos, se obtiene

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+\cdots\right)}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{2}+\cdots}{x^3}$$

El límite buscado, cuando x tiende hácia cero, es evidentemente

$$\frac{1}{2}$$

Sea, finalmente, la espresion

$$\frac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$$

Se pide su límite cuando x tiende hácia cero. Lo mas sencillo es de despreciar x^2, entónces la espresion se reduce a

$$\sqrt{a}\,\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$$

El límite buscado es por consiguiente $\sqrt{a}$.

CAPÍTULO X

MÁXIMA I MÍNIMA

Funciones de una variable

Una funcion $f(x)$ es *máxima*, para $x=a$, cuando $f(a)$ es mayor que $f(a+h)$. cualquiera que sea el signo de la cantidad infinitamente pequeña h. Al contrario $f(x)$ es *mínima*, para $x=a$, cuando, en las mismas condiciones, $f(a)$ es menor que $f(a+h)$.

Es fácil de ver que la condicion comun al máximo i al mínimo es que la primera derivada de la funcion sea nula; en efecto, se sabe que $f(x)$ crece cuando la derivada $f'(x)$ es positiva i disminuye cuando $f'(x)$ es negativa; segun esto, en los dos casos del máximo i del mínimo $f'(x)$ debe cambiar de signo cuando x pasa por el valor a; esto exije que $f'(a)$ sea igual a cero.

Para distinguir el máximo del mínimo se puede observar que, en el caso del máximo, $f'(x)$ es positivo cuando x es menor que a i negativo en seguida, luego $f'(x)$ disminuye a medida que x crece i la derivada $f''(a)$ es negativa; al contrario, en el caso del mínimo, $f''(a)$ es positiva.

Si $f'(a)$ i $f''(a)$ son nulos a la vez no se puede distinguir el máximo del mínimo i es preciso recurrir al teorema de Taylor. Segun este teorema se tiene

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(a)+\ldots.$$

Luego

$$(1)\quad f(a)-f(a+h)=-h\left\{f'(a)+\frac{h}{1.2}f''(a)+\frac{h^2}{1.2.3}f'''(a)+\ldots\ldots\right\}$$

Si $f'(a)$ tiene un valor distinto de cero, la paréntesis del segundo miembro tiene, para h suficientemente pequeño, el signo de $f'(a)$, i el primer miembro tiene entónces el signo de $-hf'(a)$. Esta espresion cambia de signo cuando h se cambia en $-h$, luego $f(a)$ no puede ser ni máximo, ni mínimo si $f'(a)$ tiene un valor distinto de cero.

Segun esto, los valores de x que corresponden a los máximos o mínimos de $f(x)$ son los que anulan su primera derivada; es la condicion obtenida mas arriba.

Supongamos ahora que $f'(a)$ sea nulo, la ecuacion (1) se reducirá a la siguiente

$$f(a)-f(a+h)=-h^2\left\{\frac{1}{1.2}f''(a)+\frac{h}{1.2.3}f'''(a)+\ldots.\right\}$$

Si $f''(a)$ tiene un valor distinto de cero, la paréntesis del segundo miembro tiene el signo de $f''(a)$ para los valores de h suficientemente pequeños, luego el primer miembro tiene entónces el signo de $-h^2f''(a)$ o el signo de $-f''(a)$; de ahí se deduce, como mas arriba, que $f(a)$ es máxima cuando $f''(a)$ es negativo i mínima cuando $f''(a)$ es positivo.

Si las derivadas $f'(a)$, $f''(a)$ son nulas, la fórmula (1) se reduce a

$$f(a)-f(a+h)=-h^3\left\{\frac{1}{1.2.3}f'''(a)+\ldots\ldots\right\}$$

Esta espresion muestra que el primer miembro cambia de signo con h si $f'''(a)$ no es nulo; luego si $f'(a)$ i $f''(a)$ son nulos i $f'''(a)$ distinto de cero, el valor $f(a)$ no es ni un máximo, ni un mínimo de $f(x)$. Para que $f(a)$ sea un máximo o un mínimo es necesario que $f'''(a)$ sea tambien nulo.

Los mismos raciocinios conducen finalmente a la regla jeneral siguiente: una funcion $f(x)$ es máxima o mínima, para $x=a$, cuando en la sucesion de las derivadas $f'(a), f''(a), f'''(a) \dots$ la primera que no se anula es de órden par; si ésta derivada es negativa, $f(a)$ es máximo i, si es positiva, $f(a)$ es mínimo.

PROBLEMA

Determinar la distancia mas corta de un punto a una curva.

Supondremos que la curva i el punto estén en un mismo plano; sean a i b las coordenadas del punto i $y=\phi(x)$ la ecuacion de la curva; el cuadrado de la distancia de un punto x, y de la curva al punto a, b es

$$\rho^2=(x-a)^2+(y-b)^2$$

Esta espresion puede ser considerada como una funcion de x si, en ella, se reemplaza y por $\phi(x)$, de suerte que los valores x que satisfacen al problema deben averiguar la ecuacion

$$x-a+(y-b)\,\phi'(x)=0$$

Esta última ecuacion significa que la recta que une los dos puntos a, b i x, y es normal a la curva $y=\phi(x)$.

Para distinguir el máximo del mínimo es preciso buscar el signo de la derivada $f''(x)$; en este caso, se tiene

$$\frac{1}{2}\,f''(x)=1+\phi'(x)^2+[\phi(x)-b]\,\phi''(x)$$

O bien

$$\frac{1}{2}\,f''(x)=1+\phi'(x)^2+(y-b)\,\phi''(x)$$

Supongamos que el punto x, y quede fijo i que el punto a, b se mueve sobre la normal, el valor de $f''(x)$ cambiará con b i habrá un valor de b i uno solo para el cual $f''(x)$ será cero; este valor de b es determinado por la ecuacion

$$1+\phi'(x)^2+(y-b)\,\phi''(x)=0$$

La distancia ρ no es, entónces, ni máxima ni mínima; busquemos este valor particular de ρ.

Se tienen, para esto, las ecuaciones siguientes

$$\rho^2=(x-a)^2+(y-b)^2$$

$$x-a+(y-b)\,\phi'=0$$

$$1+\phi'^2+(y-b)\,\phi''=0$$

De ellas se deduce

$$\rho^2=\frac{(1+\phi'^2)^3}{\phi''^2}$$

O bien

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Se ve que la distancia ρ es el radio del *círculo osculador* i la circunstancia de que ρ no es ni máximo ni mínimo muestra que este círculo atraviesa la curva sin dejar de ser tanjente a ella.

Funciones de dos variables

Una funcion $f(x, y)$ es máxima o mínima cuando la diferencia

$$f(x, y)-f(x+h, y+k)$$

conserva un mismo signo, cualesquiera que sean los signos de las cantidades infinitamente pequeñas h i k.

El teorema de Taylor da ahora

$$f(x+h, y+x)=f(x, y)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$+\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+\ldots..$$

Por consiguiente

$$f(x, y)-f(x+h, y+k)=-h\frac{\partial f}{\partial x}-k\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$-\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)-\ldots.$$

Si h i k son suficientemente pequeños el segundo miembro tiene el signo de

$$-h\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}$$

i para que esta espresion no cambie de signo cuando en ella se reemplazan h i k por $-h$ i $-k$ es necesario que se tenga

$$h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dy}=0$$

cualesquiera que sean los valores infinitamente pequeños de h i k; ésta última condicion exije que $\frac{df}{dx}$ i $\frac{df}{dy}$ sean separadamente nulos. Luego la primera condicion, comun al máximo i al mínimo, es

(2) $$\frac{df}{dx}=0,\quad \frac{df}{dy}=0$$

Si esta condicion es satisfecha se tiene

$$(3) \qquad f(x\,y)-f(x+h, y+k)=$$

$$-\frac{1}{2}\left(h^2\frac{d^2f}{dx^2}+2hk\frac{d^2f}{dxdy}+k^2\frac{d^2f}{dy^2}\right)-\ldots\ldots$$

Se ve que, para los valores suficientemente pequeños de h i k, el signo del segundo miembro depende del signo del trinomio

$$h^2\cdot\frac{d^2f}{dx^2}+2hk\frac{d^2f}{dxdy}+k^2\frac{d^2f}{dy^2}$$

Luego, para que haya máximo o mínimo, es necesario que este trinomio conserve un signo invariable, cualesquiera que sean los signos de h i k.

Este trinomio tiene tambien el signo del siguiente:

$$(4) \qquad \frac{d^2f}{dx^2}+2\frac{k}{h}\frac{d^2f}{dxdy}+\frac{k^2}{h^2}\frac{d^2f}{dy^2}$$

i, para que este signo quede invariable, es necesario que los valores de $\frac{k}{h}$ que anulan el trinomio sean imajinarios; se debe tener por consiguiente

$$(5) \qquad \left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2}<0$$

Esta condicion (5) debe pues agregarse a las condiciones (2).

Para que la condicion (5) sea satisfecha es necesario evidentemente que las derivadas $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^2f}{dy^2}$ tengan un mismo signo; si ellas son negativas el trinomio (4) es negativo, luego, segun (3), $f(x\,y)$ es máxima; al contrario, si los dos derivados $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^2f}{dy^2}$ son positivas, el trimonio (4) es positivo i $f(x\,y)$ es mínima.

PROBLEMA

Determinar la distancia mas corta de un punto a una superficie

Sean a, b, c las coordenadas de un punto P i

$$z = \phi(x, y)$$

la ecuacion de una superficie S; el cuadrado de la distancia ρ de un punto M de la superficie al punto P es

$$\rho^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

Si, en esta espresion, se reemplaza z por su valor $\phi(x, y)$ se puede asimilar ρ^2 a la funcion $f(x, y)$ considerada mas arriba; sea por consiguiente

$$f(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

Tendremos

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2} \dfrac{df}{dx} = x - a + (z-c) \dfrac{dz}{dx} \\[2ex] \dfrac{1}{2} \dfrac{df}{dy} = y - b + (z-c) \dfrac{dz}{dy} \end{cases}$$

Para que la funcion f sea máxima o mínima es necesario que $\dfrac{df}{dx}$ i $\dfrac{df}{dy}$ sean separadamente nulos, luego se debe tener, segun (6),

$$x - a + (z-c) \frac{dz}{dx} = 0$$

$$y - b + (z-c) \frac{dz}{dy} = 0$$

O bien

$$(7) \qquad \frac{x-a}{\frac{dz}{dx}} = \frac{y-b}{\frac{dz}{dy}} = \frac{z-c}{-1}$$

Se demostrará mas adelante que los denominadores de estas tres fracciones son proporcionales a los cosenos directores de la normal a la supercie S, en el punto M, luego la distancia mínima debe contarse sobre la normal a la superficie S.

Veamos ahora en qué casos la distancia ρ es máxima o mínima; para resolver este problema, podemos, para mas sencillez, elejir los ejes de coordenadas de tal manera que el oríjen O sea confundida con M i el eje OZ con la normal a la superficie en este punto. El punto P estará entónces situado sobre OZ i tendremos en las fórmulas (6)

$$a=0, \; b=0, \; c=\rho$$

$$x=0, \; y=0, \; z=0.$$

A. OBRECHT

(Continuará)