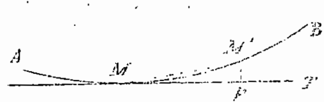
CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

O ANÁLISIS TRASCENDENTAL

(Continuacion)

Se ve que si $M' M''$ es infinitamente pequeño, respecto a MM' el límite de sen ϵ sera cero; lo que demuestra la proposicion.



2.ª Proposicion. — *Cuando las coordenadas de los puntos de una curva son funciones de un mismo parámetro, la distancia de dos puntos infinitamente próximos de la curva es de mismo orden de pequeñez que la variacion correspondiente del parametro.*

Sean en efecto, x, y z, las coordenadas de un punto de la curva (plana o no), supongamos que se tiene

$$x=f(t),\ y=\phi(t),\ z=\psi(t)$$

A un incremento dt del parametro t corresponden ciertos incrementos de las coordenadas i estos incrementos se pueden reemplazar por las diferenciales

$$dx=f'(t)dt,\ dy=\phi'(t)\ dt,\ dz=\psi'(t)\ dt$$

Así si se desprecian infinitamente pequeños de órden superior a dt se tendrá para la distancia de los dos puntos infinitamente próximos

$$\sqrt{dx^2+dx^2+dz^2}=dt\sqrt{f'^2+\phi'^2+\psi'^2}$$

El radical que multiplica dt es jeneralmente una espresion finita, luego la distancia de los puntos será del mismo órden que dt.

De esta proposicion se deduce que *si los puntos de dos curvas se corresponden unos a otros, la distancia de dos puntos infinitamente próximos de una de ellas es de mismo órden que la distancia de los puntos correspondientes de la otra, pues se puede suponer que las coordenadas de los puntos correspondientes de las dos curvas son funciones de un mismo parametro.*

3.ª Proposicion.—*La distancia de un punto de una curva a la tanjente en un punto infinitamente próximo de la misma curva es infinitamente pequeña de órden superior a la distancia de los dos puntos.*

En efecto, sean M i M' dos puntos infinitamente próximos de la curva AB i $M'P$ la distancia de M' a la tanjente MT en M.

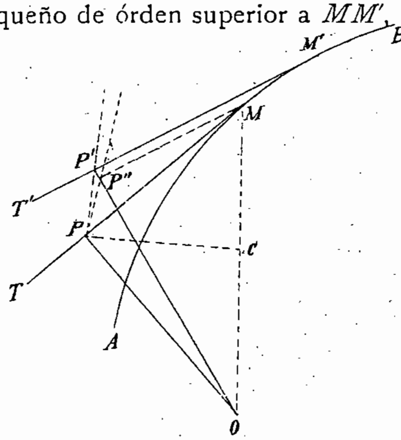
En el triángulo $MM'P$ se tiene

$$M'P = MM' \operatorname{sen} M'MP$$

Como el ángulo $M'MP$ es infinitamente pequeño se ve que $M'P$ será de órden superior a MM'.

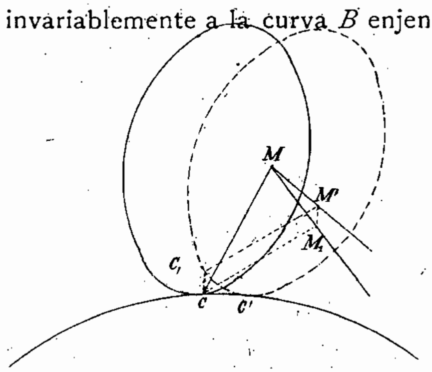
Problema de la tanjente a la podar

28.—Sea AB una curva; MT, $M'T'$ dos tanjentes en dos puntos infinitamente próximos M i M'; P i P' los puntos correspondientes de la podar que tiene por pólo un punto O. Se busca el límite de la recta PP' que será la tanjente a la podar. La distancia PP' es de mismo órden de pequeñez que MM' pues los puntos de la curva dada i de la poder se corresponden unos a otros; sea MP'' paralelo a $M'P'$; el punto P'' es tal que $P'P''$ es infinitamente pequeño de órden superior a MM', pues $P''P'$ es igual a la distancia de M a la tanjente $M'P'$; se deduce que tambien $P'P''$ es infinitamente pequeño de órden superior a PP', luego en vez de buscar el límite de PP' se puede buscar el límite de PP''. Ahora los dos puntos P, P'' se encuentran sobre una misma circunferencia de diámetro OM, luego, en el límite, PP'' será tanjente a esta circunferencia, es decir, perpendicular a la recta PC que junta P al punto medio C de OM. Resultado conforme al cálculo.



Tanjente a una curva epicicloidal

Cuando una curva B rueda sin resbalar sobre otra curva A fija, un punto M ligado invariablemente a la curva B enjendra una curva epicicloidal; se trata de buscar la tanjente a esta última curva.



Sean B i B' dos posiciones infinitamente próximas de la curva móvil; C i C' los puntos de contacto, C_1 la posición que ocupa el punto C de la curva B cuando esta última curva ha venido en B'; M i M' las dos posiciones del punto ligado a la curva móvil.

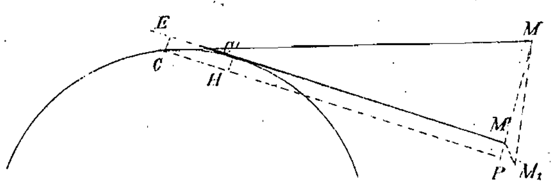
La lonjitud MM' es de mismo órden de pequeñez que CC', pues a cada punto de contacto C corresponde un punto M; ahora C_1C es infinitamente pequeño de órden superior a CC', porque, si se traza la tanjente comun en C' a las curvas A i B', esta tanjente dividirá CC_1 en dos segmentos infinitamente pequeños de órden superior a CC' o bien a C_1C'.

Si se traza por M' una recta $M'M_1$ igual en lonjitud i direccion a C_1C, la distancia $M'M_1$ será infinitamente pequeña de órden superior a MM', luego el límite de la direccion MM' es el mismo que el de la direccion MM_1; ahora la figura muestra que $CM_1 = C_1M' = CM$, luego M_1 esta sobre una circunferencia de radio CM_1 igual a CM; el límite de la direccion MM_1 será, pues, la de la tanjente a una circunferencia de centro O i de radio CM; en resúmen, la normal a la curva descrita por el punto M es la recta MC que junta M al punto de contacto.

Tanjente a la desarrollante de una curva

Si se desarrolla progresivamente un hilo inestensible, primitivamente enrollado sobre una curva AB, de manera que el hilo quede siempre tendido, su estremidad M describe una curva que se llama *desarrollante* de AB.

Sean CM, $C'M'$ dos posiciones infinitamente próximas del hilo, se trata de determinar el límite de la direccion MM'. En primer lugar MM' es infinitamente pequeño de mismo órden que CC'; sea ahora CM_1 una recta



paralela a $C'M'$ i M_1 un punto tal que $CM_1 = CM$; sean tambien CE, $C'H$ dos perpendiculares a $C'M'$.

El límite de la direccion MM_1 es el mismo que el límite de la direccion MM'; para demostrarlo basta demostrar que $M'M_1$ es infinitamente pequeño de órden superior a MM' o de órden superior a CC', pues CC' es de mismo órden que MM'

Sea $M'P$ una perpendicular sobre CM_1; la lonjitud $M'P$ es infinitamente pequeña de órden superior a CC', pues es igual a la distancia CE de C a la tanjente $C'M'$; tambien PM_1, es infinitamente pequeño de órden superior a CC', en efecto

$$PM_1 = CM_1 - CP$$

Ahora

$$CP = CH + HP = CH + C'M'$$

Luego

$$PM_1 = CM_1 - CH - C'M'$$

I como

$$CM_1 = CM = CC' + C'M'$$

Quedará:

$$PM_1 = CC' - CH;$$

esta diferencia es evidentemente de órden superior a CC' pues el ángulo en C' es infinitamente pequeño. Así en el triángulo rectángulo $M'PM_1$ los lados $M'P$, MP_1 son infinitamente pequeños de órden superior a CC', luego tambien la hipotenusa $M'M_1$ será infinitamente pequeña de orden superior a CC'

Segun esto el límite buscado es el mismo que el límite de la direccion MM_1; este último es la tanjente á una circunferencia de centro C; luego la normal a la desarrollante en el punto M es la recta CM.

CAPÍTULO VII

DE LA RECTIFICACION DE LOS ARCOS

29.—*Diferencial de un arco de curva.*

Sea AB una curva plana o no; x, y, z las coordenadas de cierto punto M de la curva respecto a tres ejes rectangulares i s el arco contado desde cierto punto fijo A hácia el punto M; si x, y, z son espresados en funcion de cierto parametro t, s será uncion de t; buscaremos en primer lugar la derivada de s respecto a t. Cuando t se incrementa de dt, el punto M viene en M' i se puede tomar para las coordenadas de M' las siguientes

$$x+\frac{dx}{dt}dt, \quad y+\frac{dy}{dt}dt, \quad z+\frac{dz}{dt}dt$$

Se sabe que en estas espresiones se han despreciado los infinitamente pequeños de órden superior a dt; ahora el incremento del arco AM es de mismo órden de pequeñez, que la cuerda MM' i su límite a MM' es uno; luego podemos tomar para el incremento del arco el valor siguiente

$$dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

La derivada de s respecto a t será por consiguiente

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

I la diferencial del arco sera

$$ds=dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

Reciprocamente si se quiere calcular un arco de curva correspondiente a dos valores t_1, t_2 del parametro t, se escribirá

$$s=\int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Para las curvas planas se tomará el plano de la curva como plano de coordenadas. Si la curva está, por ejemplo, en el plano XOY, se hará en las espresiones anteriores: $dz=o$ i se tendrá

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

Arco de circunferencia.

Sea r el radio, se elije el oríjen de las coordenadas en el centro, luego las coordenadas de un punto M podrán ponerse bajo la forma:

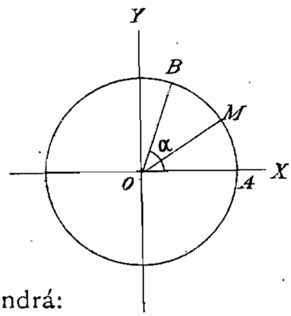
$$x = r \cos t$$

$$y = r \operatorname{sen} t$$

El parametro t representa aquí el ángulo que hace el radio OM con el eje OX. Se tendrá

$$dx = -r \operatorname{sen} t \, dt$$

$$dy = r \cos t \, dt$$



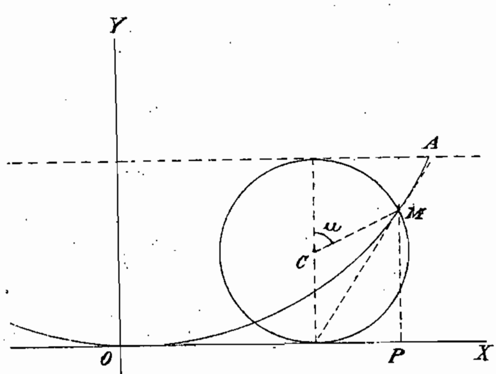
Luego

$$ds = r \, dt$$

Si se quiere la lonjitud del arco AB contado desde el eje OX hasta un punto B tal que $AOB = \alpha$ se tendrá:

$$s = r \int_0^\alpha dt = r \, \alpha$$

Arco de cicloide.



Consideremos una cicloide referida a dos ejes rectangulares, dispuestos como en la figura, es decir, de tal manera que el eje OX sea paralelo a la recta sobre la cual rueda la circunferencia jeneratriz i tanjente a la cicloide, el oríjen estando en el punto de tanjencia.

Si se toma como mas arriba el ángulo u como parametro variable i si r es el radio de la circunferencia generatriz; se tendrá, para las coordenadas de un punto M

$$x = r(\pi - u + \text{sen } u)$$

$$y = r(1 + \cos u)$$

Se deduce

$$dx = -r du(1 - \cos u)$$

$$dy = -r du \text{ sen } u$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = r du \sqrt{(1 - \cos u)^2 + \text{sen}^2 u} = 2 r du \text{ sen } \frac{u}{2}$$

Si se llama s la lonjitud del arco OM se tendrá

$$s = 2r \int_u^\pi du \text{ sen } \frac{u}{2} = 4 r \cos \frac{u}{2}.$$

Esta fórmula permite espresar s en funcion de y, en efecto se tiene

$$y = 2 r \cos^2 \frac{u}{2}$$

Luego

$$s^2 = 8 r y$$

30. La propiedad que indica esta última fórmula es característica de las cicloides; en efecto, busquemos las curvas en las cuales se tiene la relacion

$$s^2 = ky$$

De esta ecuacion se deduce

$$s = \sqrt{ky}$$

$$ds = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{y}}\, dy$$

O bien

$$dx^2 + dy^2 = \frac{k}{4y} dy^2$$

$$dx = dy\sqrt{\frac{k - 4y}{4y}}$$

La ecuacion jeneral de las curvas que satisfacen a la relacion anterior es pues

$$x=\int dy\sqrt{\frac{k-4y}{4y}}+C$$

Para hacer la integracion se pone

$$4y=k\cos^2\omega$$

I la integral se trasforma en la siguiente

$$x=\int -\frac{k}{2}\sin^2\omega\, d\omega+C=\frac{k}{8}(\sin 2\omega-2\omega)+C$$

Así la ecuacion jeneral buscada se puede escribir de la manera siguiente

$$x=\frac{k}{8}(\operatorname{sen} 2\omega-2\omega)+C$$

$$y=\frac{k}{8}(1+\cos 2\omega)$$

Son cicloides tanjentes al eje OX i que tienen su base paralela a OX; el radio del círculo generador es $\frac{k}{2}$.

Arco de parábola.

Sea $y^2=2px$ la ecuacion de la curva, se tendrá:

$$y\,dy=p\,dx$$

Luego

$$ds^2=dx^2+dy^2=dy^2\left(1+\frac{y^2}{p^2}\right)$$

Si se quiere la lonjitud del arco contado desde el vértice hasta cierto punto de ordenada y se escribirá

$$s=\int_0^y dy\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}=\frac{p}{2}\,L\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}+\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2}$$

Arco de elipse.

La ecuacion de la elipse se puede escribir de la manera siguiente

$$x = a \cos t$$

$$y = b \operatorname{sen} t$$

Se ve que la eliminacion de t da en efecto la ecuacion conocida. De estas dos ecuaciones se deduce

$$dx = -a \operatorname{sen} t\, dt$$

$$dy = b \cos t\, dt$$

Luego

$$ds = dt\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

O bien, si se introduce la excentricidad e

$$ds = adt\sqrt{1 - e^2 \sin^2 t}$$

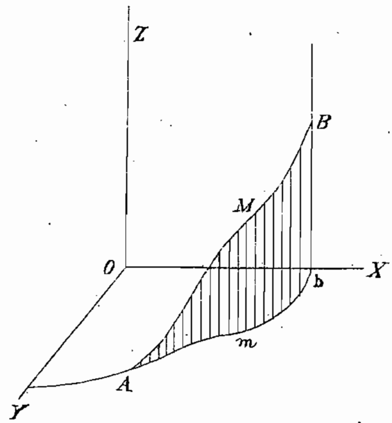
La lonjitud de un arco s de la elipse será dada, segun esto, por una integral de la forma siguiente

$$s = a\int dt\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 t}$$

Esta integral no es una de las funciones en uso jeneralmente; es decir que la funcion que tiene por derivada $\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 t}$ no es ni aljebráica, ni trigonométrica, ni esponencial o logarítmica. Esto no impide que en realidad esta funcion existe; ella pertenece a la clase de funciones que, por analojía, se han llamado *funciones elípticas*:

Arco de hélice.

31. — Consideremos un cilindro i un sistema de tres ejes de coordenadas elejidos de tal manera que OZ sea paralelo a las jeneratrices del cilindro. La seccion recta será una curva como $A\,m\,b$. Si m es un punto de la seccion recta; x, y sus coordenados i σ el arco Am contado desde cierto punto A, se podrá escribir



$$x = f(\sigma)$$
$$y = \phi(\sigma)$$

La hélice es una curva como AMB trazada sobre el cilindro i tal que la ordenada Mm de uno cualquiera de sus puntos es proporcional al arco Am de la seccion recta es decir que los coordenadas del punto M satisfarán a las ecuaciones siguientes

$$x = f(\sigma)$$
$$y = \phi(\sigma)$$
$$z = \sigma\, tg\, \theta$$

En la espresion de z se considera θ como constante. De estas ecuaciones se deduce

$$dx = f'(\sigma)\, d\sigma$$
$$dy = \phi'(\sigma)\, d\sigma$$
$$dz = tg\, \theta\, d\sigma$$

Luego

$$ds = d\sigma \sqrt{f'^2(\sigma) + \phi'^2(\sigma) + tg^2\, \theta}$$

Pero, en la seccion recta se tiene

$$dx^2 + dy^2 = d\sigma^2$$

Por consiguiente

$$\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 = 1$$

O bien

$$f'^2_1(\sigma)+\phi'^2_2(\sigma)=1$$

Tendremos, segun esto

$$ds=d\sigma\sqrt{1+tg^2\,\theta}=\frac{d\sigma}{\cos\theta}$$

Se integra inmediatamente i se tiene

$$s=\frac{\sigma}{\cos\theta}+C$$

Si s se cuenta como σ desde el punto A se tendrá simplemente

$$s=\frac{\sigma}{\cos\theta}$$

Esta fórmula es evidente cuando se considera que la helice se desarrolla segun una recta.

Espresion de la lonjitud del arco en una curva referida a coordenadas polares

La figura ya considerada para obtener la tanjente a una curva referida a coordenadas polares nos da luego

$$ds^2=dr^2+r^2\,d\theta^2$$

O bien

$$ds=d\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

Luego

$$s=\int d\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

Arco de cardioìde.

La cardioïde es la curva enjendrada por los pies de las perpendiculares bajadas desde un punto de una circunferencia sobre sus tanjentes. Su ecuacion es

$$r = a\,(1 + \cos\,\theta)$$

Por consiguiente

$$\frac{dr}{d\theta} = -a \operatorname{sen}\,\theta$$

$$ds^2 = a^2 \left\{ (1 + \cos\,\theta) + \operatorname{sen}^2\,\theta \right\} d\theta^2 = 4\,a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta^2$$

$$s = 2\,a \int \cos\,\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4a\ \operatorname{sen}\,\frac{\theta}{2} + C$$

El arco comprendido entre $\theta = o$ i $\theta = \pi$ tendrá por lonjitud

$$s = 2\,a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4\,a$$

Direccion de la tanjente en una curva que no es plana

34. Sean α, β, γ los cosenos directores de la tanjente a una curva cualquiera en uno de sus puntos de coordenadas x, y, z. Si se considera un elemento infinitamente pequeño de la curva, de lonjitud ds, este elemento se proyectará sobre los tres ejes, segun dx, dy, dz; luego se tendrá

$$dx = \alpha\,ds$$

$$dy = \beta\,ds$$

$$dz = \gamma\,ds$$

O bien

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

Por ejemplo, en el caso de la helice se tiene

$$\alpha = f'(\sigma)\cos\theta$$

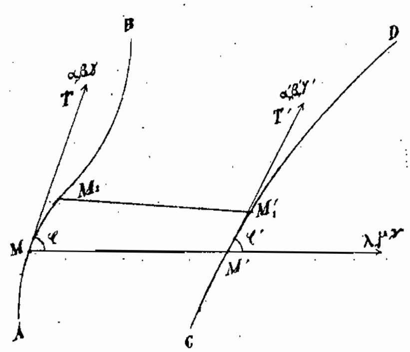
$$\beta = \phi'(\sigma)\cos\theta$$

$$\gamma = \operatorname{sen}\theta$$

En este último caso, el coseno del ángulo que hace la tanjente con OZ o con las jeneratrices es constante, i el ángulo que hace esta tanjente con el plano XOY es igual a θ.

Variacion de lonjitud de una recta móvil que se apoya sobre dos curvas

35.—Sean AB, CD dos curvas i MM' una recta móvil que se apoya sobre ellas, l la lonjitud MM'; x, y, z las coordenadas de M respecto a cierto sistema de tres ejes rectangulares; x' y' z' las coordenadas de M'; ds el arco que describe el punto M sobre AB i ds' el arco correspondiente descrito por M' sobre CD; α, β, γ los cosenos directores de la tanjente MT a la curva AB; α' β' γ' los de la tanjente M' T' a CD; λ, μ, ν los cosenos directores de MM'; se tiene



$$x' = x + l\lambda$$

$$y' = y + l\mu$$

$$z' = z + l\nu$$

Luego

$$dx' = dx + \lambda\, dl + l d\lambda$$

$$dy' = dy + \mu\, dl + l d\mu$$

$$dz' = dz + \nu\, dl + l d\nu$$

Si se multiplica la primera ecuacion por λ, la segunda por μ, la tercera por ν i si se suman se obtiene

$$(1) \qquad \lambda\, dx' + \mu dy' + \nu dz' = \lambda dx + \mu dy + \nu dz + dl$$

En efecto se tiene

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu = 1$$

$$\lambda\, d\lambda + \mu\, d\mu + \nu\, d\nu = 0$$

Ahora, si dx, dy, dz son los diferenciales de x, y, z, se puede escribir

$$dx = \alpha\, ds$$

$$dy = \beta\, ds$$

$$dz = \gamma\, ds$$

Del mismo modo

$$dx = \alpha'\, ds'$$

$$dy' = \beta'\, ds'$$

$$dz' = \gamma'\, ds,$$

Luego si se lleva en (1)

$$ds' \, (\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma') = ds\, (\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma) + dl$$

Sea ϕ el ángulo que hace MT con MM' i ϕ' el de $M'T'$ con la prolongacion de MM' se tiene

$$\cos \phi = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$$

$$\cos \phi' = \lambda\alpha' + \mu\beta + \nu\gamma'$$

Luego

$$(2) \qquad dl = ds' \cos \phi' - ds \cos \phi$$

Esta fórmula se obtiene directamente por medio de las projecciones. Sea en efecto en la figura $MM_1 = ds$; $M'M_1{}' = ds'$

M_1 $M'_1 = l + dl$ si se proyecta el contorno MM_1 M'_1 M' sobre MM'_1 la proyeccion será igual a l; sea ϵ el ángulo de $M_1M'_1$ con MM' se tiene

$$l = ds \cos\phi + (l + dl)\cos\epsilon - ds' \cos\phi'$$

Como ϵ es infinitamente pequeño se debe reemplazar $\cos\epsilon$ por 1 i quedará

$$dl = ds' \cos\phi' - ds \cos\phi$$

(Continuará)

ALBERTO OBRECHT
Director del Observatorio Astronómico
Profesor de las clases de mecánica i cálculo diferencial e integral de la Universidad