

# ESTRUCTURAS DE INERCIA VARIABLE SOMETIDAS A TERREMOTO

Raúl HUSID\*  
Sergio BARRERA\*\*

## RESUMEN

*Se estudia la respuesta de estructuras deformables solo por corte, homogéneas, isotrópicas, fijas en su base y con sección transversal trapecial, sometidas a la acción de terremotos. Se presentan expresiones exactas para el desplazamiento, esfuerzo de corte y momento de flexión, como función del tiempo y de la posición, empleando parámetros adimensionales. La ecuación de frecuencias se resuelve para 14 estructuras diferentes que cubren ampliamente todos los casos de interés práctico. Se determinan los primeros diez modos normales de vibración y se estudia la relación entre las raíces de la ecuación y el orden de los modos. Se calculan las masas equivalentes para los modos de vibrar considerados, como fracción de la masa total de la estructura y se estudia su variación al cambiar la sección transversal. Empleando cinco criterios de superposición modal se estima el desplazamiento, esfuerzo de corte y momento de flexión máximos, como función de la posición.*

## INTRODUCCION

Varios códigos modernos de diseño sísmico prescriben el análisis dinámico para estructuras importantes que deben soportar terremotos. Aun cuando se acepta el

---

\* Profesor de ingeniería Sísmica, Departamento de Geofísica, Colorado School of Mines, Golden, CO. Actualmente en el U.S. Geological Survey; Branch of Earthquake Hazards, Denver, Colorado. E.U.A.

\*\* Ingeniero Civil, E. Rowe Asoc., Santiago, Chile.

Trabajo presentado a las 2<sup>a</sup> Jornadas Chilenas de Ingeniería Antisísmica.

uso de cualquier método dinámico basado en las ecuaciones generales de la dinámica, generalmente se acepta el análisis dinámico modal<sup>1,2,3,4</sup>.

Las estructuras continuas uniformes; tanto deformables sólo por corte o por flexión han recibido la atención de gran cantidad de investigadores y es posible encontrar en la literatura tablas con todas las características dinámicas necesarias para determinar rápidamente la respuesta a sollicitaciones dadas<sup>5,6,7,8,9</sup>.

Algunos estudios han sido realizados con el objeto de obtener la respuesta de estructuras de inercia variable, pero el énfasis siempre ha sido puesto en obtener las raíces de la ecuación de frecuencias y expresiones para los desplazamientos laterales, esfuerzo de corte y momento de flexión para estructuras sometidas a la acción de terremotos.

Es notorio el vacío que se encuentra al tratar de hacer un análisis dinámico simple de estructuras deformables sólo por corte o sólo por flexión, de inercia variable, sometidas a la acción de terremotos. El calculista no dispone, en general, de relaciones que le permitan estimar rápidamente las masas equivalentes, aun cuando tenga tabulada las formas de los modos de vibrar.

Husid, Asfura y Astroza<sup>10</sup> facilitaron el análisis de un tipo de chimeneas de inercia variable, deformables sólo por flexión, al evaluar las integrales que aparecen en la expresión general de las masas equivalentes.

Varios autores<sup>11,12,13,14</sup> han analizado estructuras deformables sólo por corte con sección transversal trapecial.

Husid<sup>14</sup> estudió la posibilidad de estimar la respuesta exacta de sistemas continuos deformables por corte y con inercia variable sometidos a la acción de terremotos, mediante criterios de superposición modal y tabuló las masas de los 20 primeros modos normales de vibrar para una sección trapecial dada.

En el presente trabajo se estudia el problema general de la respuesta a terremotos de estructuras de inercia variable, deformables sólo por corte, como la que se presenta en Fig. 1, con el objeto de simplificar el análisis dinámico de ese tipo de estructuras.

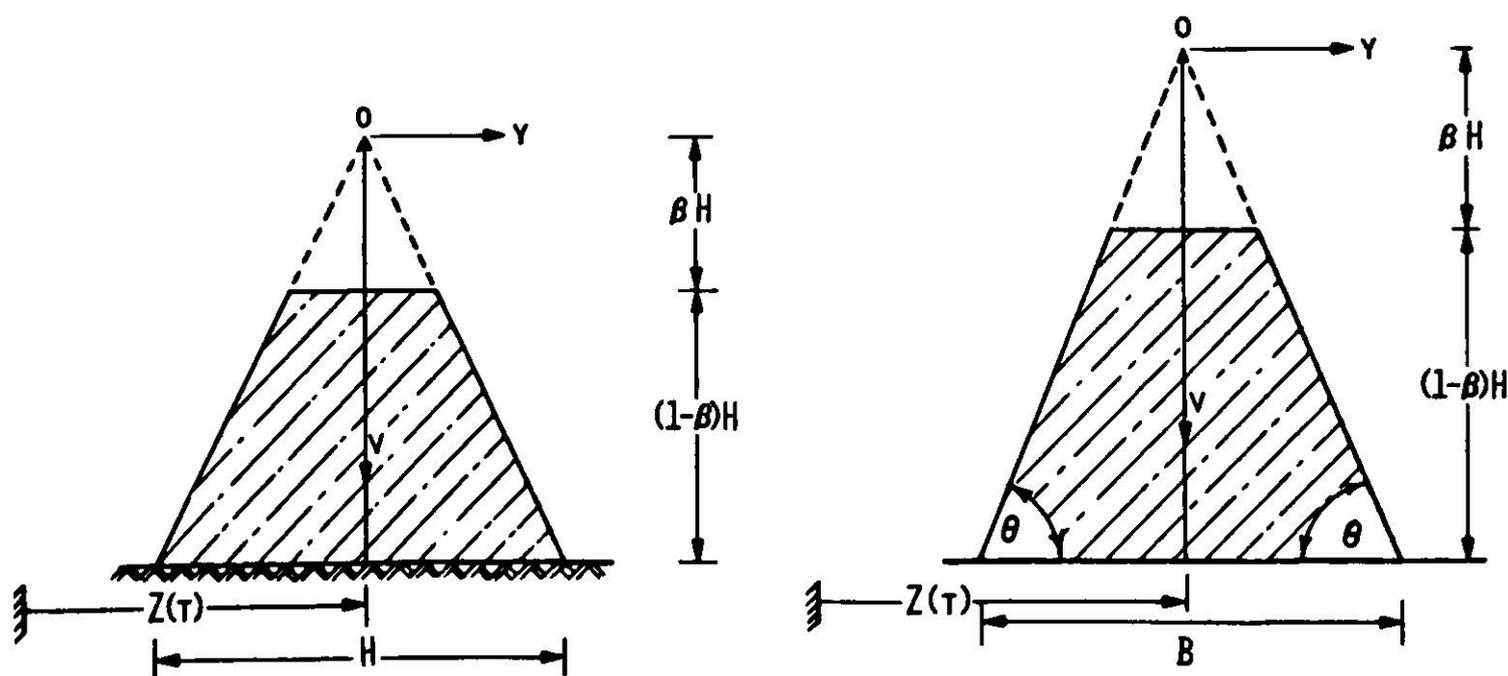


Fig. 1. Características de las estructuras estudiadas.

## ESTRUCTURAS ANALIZADAS

Se estudian estructuras lineales con sección transversal trapezoidal, fijas en su base, homogéneas, isotrópicas y que se deforman sólo por corte, Fig. 1. Se desprecia el efecto de la gravedad, la interacción suelo-estructura, la inercia rotatoria, la deformación por flexión y el amortiguamiento que pudiera tener la estructura.

Cuando la base se desplaza horizontalmente en  $z(t)$ , la ecuación diferencial del movimiento está dada por<sup>14</sup>:

$$\nu \frac{\partial^2 y}{\partial \nu^2} + \frac{\partial y}{\partial \nu} = a^2 \nu \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{d^2 z}{dt^2} \right\} \quad (1)$$

donde  $\nu$  e  $y$  aparecen definidos en Fig. 1 y  $a^2$  es la razón entre la densidad de la estructura y el módulo de corte  $G$ .

Los modos normales de vibración resultan:

$$X_n(\alpha) = J_0(\lambda_n^* \alpha) - \frac{J_0(\lambda_n^*) Y_0(\lambda_n^* \alpha)}{Y_0(\lambda_n^*)} = C_0(\lambda_n^* \alpha) \quad (2)$$

donde

$$\alpha = \frac{\nu}{H} \quad (3)$$

$$\lambda_n^* = \lambda_n H \quad (4)$$

$J_0$  es una función de Bessel de orden cero y primera clase,  $Y_0$  es una función de Bessel de orden cero y segunda clase,  $C_0$  es una función cilíndrica de orden cero, y  $\lambda_n$  es una raíz de la ecuación de frecuencias.

## Solución de la ecuación diferencial

Sea la solución de ecuación 1 del tipo:

$$y(\nu, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) X_n(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) C_0(\lambda_n \nu) \quad (5)$$

donde los  $B_n(t)$  son funciones por determinar.

Resulta fácil verificar que  $B_n(t)$  tiene la siguiente expresión para condiciones iniciales nulas:

$$B_n(t) = \frac{1}{d_n} \int_0^t G_n(\tau) \text{ sind}_n(t-\tau) d\tau \quad (6)$$

donde

$$\lambda_n = a d_n \quad (7)$$

$$G_n(t) = - \frac{R_2(\lambda_n)}{R_1(\lambda_n)} \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \quad (8)$$

$$R_2(\lambda_n) = \int_{\beta H}^H \nu C_o(\lambda_n \nu) d\nu \quad (9)$$

$$R_1(\lambda_n) = \int_{\beta H}^H \nu C_o^2(\lambda_n \nu) d\nu \quad (10)$$

Evaluando las integrales  $R_2(\lambda_n)$  y  $R_1(\lambda_n)$  y recordando que de las condiciones en la frontera se deduce

$$C_o(\lambda_n H) = 0 \quad (11)$$

$$C_1(\lambda_n \beta H) = 0 \quad (12)$$

y por ende se tiene:

$$R_2(\lambda_n) = \frac{H}{\lambda_n} C_1(\lambda_n H) \quad (13)$$

$$R_1(\lambda_n) = \frac{H^2}{2} \left\{ C_1^2(\lambda_n H) - \beta^2 C_o^2(\lambda_n \beta H) \right\} \quad (14)$$

### Solución de la ecuación de frecuencias

La ecuación característica correspondiente a la estructura en estudio resulta:

$$J_o(\lambda_n^*) Y_1(\beta \lambda_n^*) = J_1(\beta \lambda_n^*) Y_o(\lambda_n^*) \quad (15)$$

Se calcularon las diez primeras raíces para 14 valores de  $\beta$ : 0.95; 0.90; 0.85; 0.80; 0.75; 0.67; 0.6; 0.5; 0.4; 0.33; 0.25; 0.20; 0.10 y 0.05.

En las Figs. 2 y 3 se han dibujado las raíces calculadas en función del orden del modo para diez valores de  $\beta$ . Resulta evidente que se tiene una muy buena

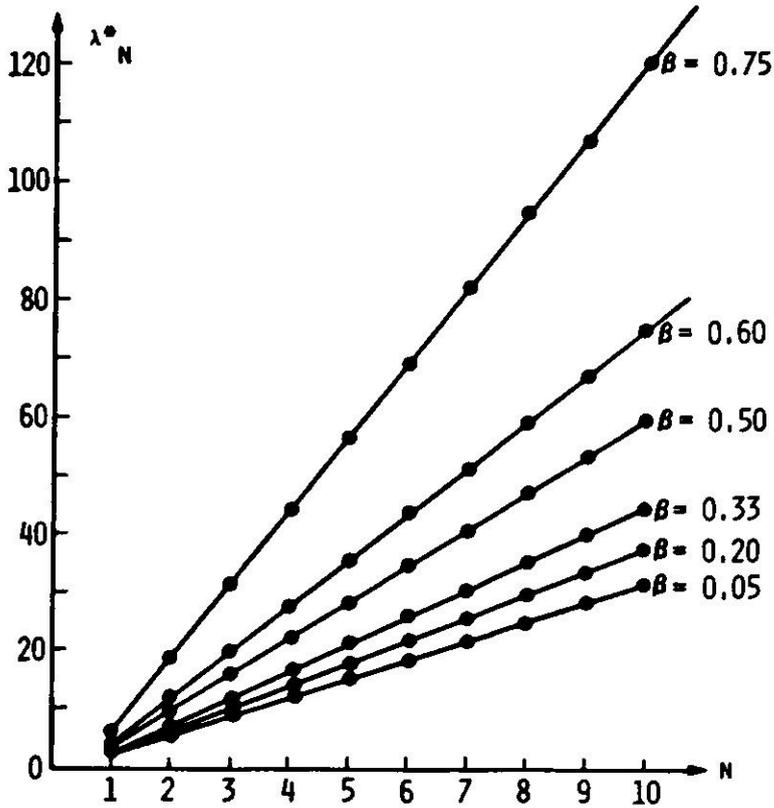


Fig. 2. Raíces de la ecuación de frecuencias.

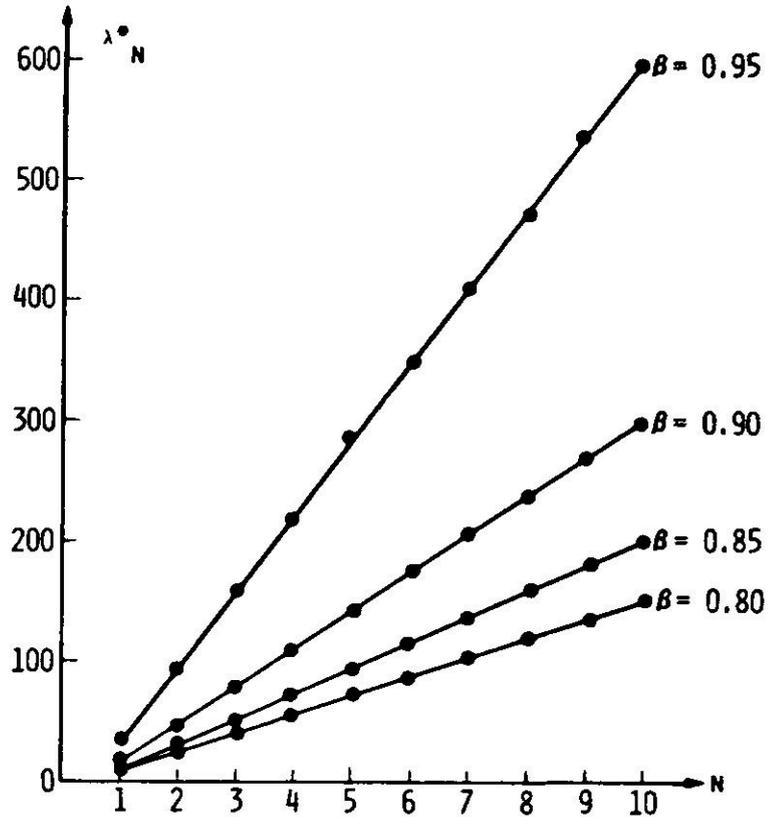


Fig. 3. Raíces de la ecuación de frecuencias.

aproximación si se adopta una dependencia lineal entre  $\lambda_n^*$  y el orden del modo, o sea, se puede estimar las raíces con la ecuación:

$$\lambda_n^* = \left( \frac{1}{1 - \beta} \right) \left\{ 3.1n + \frac{1.63\beta^2 - 1.76\beta - 0.85}{\sqrt[3]{1 - \beta}} \right\} \quad (16)$$

La relación anterior estima las raíces de la ecuación de frecuencias con errores de hasta 7% para el modo fundamental y errores menores del 2% para los nueve modos siguientes.

### Masas equivalentes

Cuando se realiza un análisis dinámico modal de la estructura de Fig. 1, se implica la equivalencia dinámica que aparece en Fig. 4.

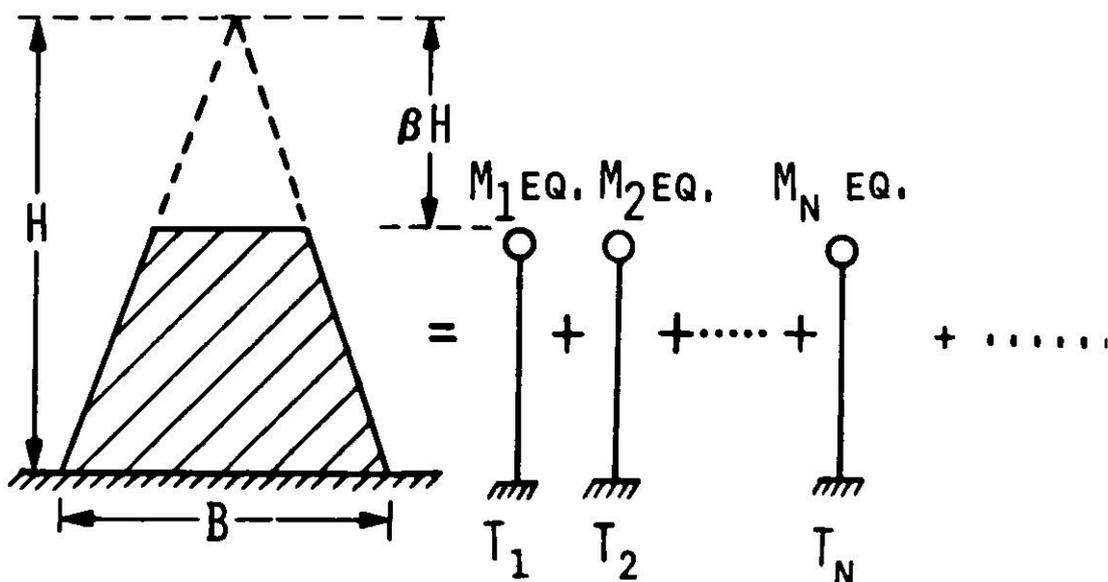


Fig. 4. Osciladores equivalentes.

Las masas equivalentes correspondientes a una estructura continua, como la de Fig. 1, están dadas por<sup>5</sup>:

$$M_n = \frac{\left\{ \int \frac{H}{\beta H} \gamma(v) X_n(v) dv \right\}^2}{\int \frac{H}{\beta H} \gamma(v) \left\{ X_n(v) \right\}^2 dv} \quad (17)$$

donde  $\gamma(v)$  es la masa por unidad de largo y  $X_n(v)$  es la forma de vibrar de la estructura en el modo  $n$ .

Desarrollando la ecuación 17, se encuentra:

$$100 \frac{M_n}{M_T} = \frac{200}{1 - \beta^2} \frac{\left\{ R_2(\lambda_n^*) \right\}^2}{R_1(\lambda_n^*)} \quad (18)$$

La relación 18 fue evaluada para 14 valores de  $\beta$  y en cada caso para los primeros diez modos de vibración. Los resultados aparecen en Figuras 5a, 5b y 5c y de su observación se desprende claramente que hay una dependencia casi lineal entre  $\beta$  y  $M_n/M_T$  para los modos de vibrar considerados.

En esta forma, basta haber determinado las masas equivalentes para un valor de  $\beta$  dado, para leer de las figuras anteriores todas las masas equivalentes para otro valor de  $\beta$ .

Los errores máximos que las líneas de mínimos cuadros generan se presentan para  $\beta = 0.5$  y  $0.95$  y alcanzan a:  $0.5\%$  -  $2.5\%$  -  $2.5\%$  -  $3.8\%$  -  $4.5\%$  -  $5.0\%$  -  $5.3\%$  -  $5.5\%$  -  $5.6\%$  y  $6.3\%$  para los modos de vibrar: fundamental-segundo modo - .... - décimo modo, que son realmente pequeños.

### Respuesta exacta

A continuación se anotan las expresiones obtenidas por Husid y Saavedra<sup>14</sup>:

a) Desplazamiento horizontal.

$$y(\alpha, t) = \frac{\lambda_1^* T_1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_0(\lambda_n^*)}{\lambda_n^*} \int_0^t G_n(\tau) \sin d_n(t - \tau) d\tau \quad (19)$$

b) Esfuerzo de corte.

$$\frac{Q(\alpha, t)}{Mg} = - \frac{4\pi\alpha}{(1 - \beta^2)gT_1\lambda_1^*} \sum_{n=1}^{\infty} C_1(\lambda_n^*\alpha) \int_0^t G_n(\tau) \sin d_n(t - \tau) d\tau \quad (20)$$

c) Momento de flexión.

$$\frac{M_f(\alpha, t)}{MgH} = \frac{-4\pi}{(1-\beta^2)gT_1\lambda_1^*} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\beta}^{\alpha} \alpha C_1(\lambda_n^* \alpha) d\alpha \int_0^t G_n(\tau) \sin d_n(t-\tau) d\tau \quad (21)$$

Se hace notar que las relaciones 19, 20 y 21 son válidas para la estructura que aparece en Fig. 1 y para la cual se cumple  $B = H$ , o sea,  $\text{tg}\theta = 2$ . A continuación se analiza el caso en que  $B \neq H$ .

### Extensión del estudio

En los párrafos anteriores se ha dado una solución para las características dinámicas y respuesta a terremotos de estructuras con sección trapezoidal y  $\text{tg}\theta = 2$ . A continuación se indica como emplear los resultados anteriores cuando  $B$  es diferente de  $H$  (Fig. 1).

### Ecuación diferencial del movimiento

Resulta simple demostrar que para  $B \neq H$ , sigue cumpliéndose la relación 1.

### Modos normales de vibrar

En vista de que la ecuación diferencial no se modifica, los modos de vibrar tampoco cambian.

### Desplazamiento horizontal

Como coinciden los modos normales de vibrar, los  $B_n(t)$  son los mismos que para  $\text{tg}\theta = 2$  y la relación 15 se cumple para  $B \neq H$ .

### Esfuerzo de corte

Resulta fácil comprobar que

$$Q(v, t, \theta) = \frac{2}{\text{tg}\theta} Q(v, t, B = H) \quad (22)$$

pero como el peso total de la estructura, por unidad de longitud,  $Mg$ , vale:

$$Mg = \frac{2}{\text{tg}\theta} \left\{ \frac{H^2 (1 - \beta^2) \gamma g}{2} \right\} \quad (23)$$

resulta

$$\left( \frac{Q}{Mg} \right) (\alpha, t, \text{tg}\theta \neq 2) = \left( \frac{Q}{Mg} \right) (\alpha, t, \text{tg}\theta = 2) \quad (24)$$

Así se demuestra que el esfuerzo de corte dividido por el peso por unidad de longitud para  $B \neq H$  coincide con el correspondiente a  $B = H$ .

### Momento de flexión

Empleando la definición, se puede demostrar que:

$$M_f(v, t, \theta) = \frac{2}{\operatorname{tg}\theta} M_f(v, t, \operatorname{tg}\theta = 2) \quad (25)$$

y por ende, introduciendo la relación 23, se tiene

$$\left( \frac{M_f}{MgH} \right) (v, t, \theta) = \left( \frac{M_f}{MgH} \right) (v, t, \operatorname{tg}\theta = 2) \quad (26)$$

### Masas equivalentes

Cuando se usa la relación 20 se obtiene:

$$M_n(v, t, \theta) = \frac{2}{\operatorname{tg}\theta} M_n(v, t, \operatorname{tg}\theta = 2) \quad (27)$$

dividiendo por  $Mg$  (relación 23) miembro a miembro, se obtiene

$$\left( \frac{M_n}{Mg} \right) (v, t, \theta) = \left( \frac{M_n}{Mg} \right) (v, t, \operatorname{tg}\theta = 2) \quad (28)$$

En esta forma se ha encontrado que conocidas las masas equivalentes, esfuerzo de corte y momento de flexión para la estructura que cumple la relación  $B = H$ , las expresiones correspondientes a estructuras en las que  $B \neq H$  se obtienen multiplicando el valor obtenido para  $B = H$  por  $2/\operatorname{tg}\theta$ .

### Resultados obtenidos al estimar la respuesta

Al estudiar estadísticamente la respuesta de estructuras sometidas a la acción de terremotos reales, resulta difícil interpretar los resultados obtenidos. Esto se debe fundamentalmente a que los acelerogramas registrados poseen duraciones, intensidades, aceleraciones máximas<sup>15</sup> etc., que varían fuertemente, haciendo inadecuado suponer que dichos acelerogramas son muestras de una misma población. Al usar terremotos generados artificialmente, como excitación para las estructuras, resulta posible hacer estudios estadísticos más significativos de la respuesta, dado que, por ejemplo, los terremotos artificiales pueden generarse fácilmente con duración e intensidades dadas<sup>16</sup>.

En el presente trabajo se han empleado terremotos artificiales generados en CALTECH<sup>16</sup> como sollicitación lateral para las estructuras analizadas. Un estudio completo de las características de los terremotos artificiales considerados aparece en trabajos anteriores de Husid<sup>17, 18</sup>.

La respuesta exacta máxima fue obtenida para el desplazamiento, esfuerzo

de corte y momento de flexión para todas las estructuras consideradas, para los terremotos artificiales<sup>16</sup> n° 1 y n° 2, para tres valores del período fundamental ( $T_1 = 1.5 - 3.0 - 4.5$  seg) y catorce valores de  $\beta$ , Fig. 5, empleando diez modos de vibrar y considerando 26 niveles.

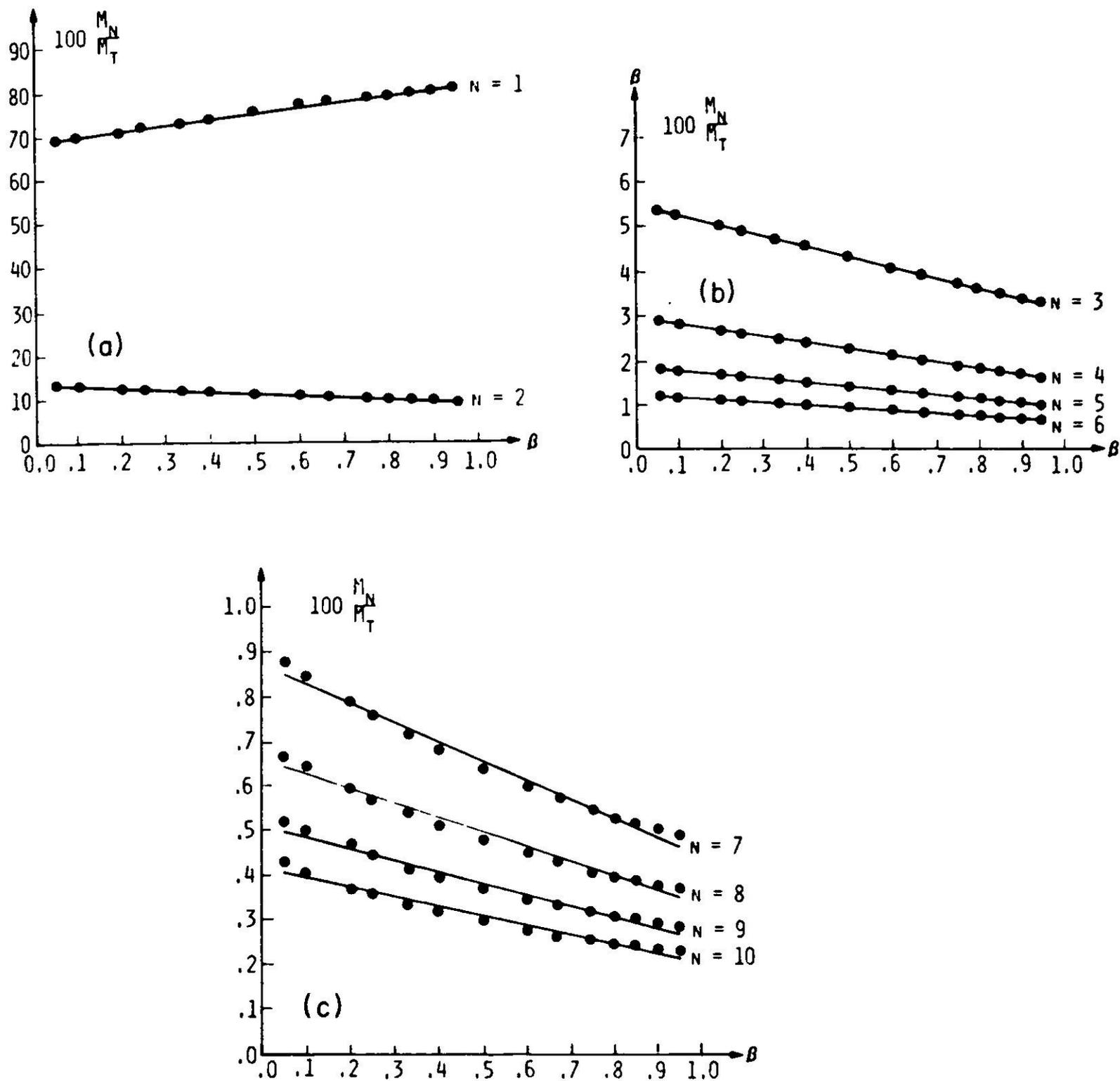


Fig. 5. Masas equivalentes como fracción de la masa total.

Una vez conocidas las respuestas modales máximas, se procedió a calcular las estimaciones dadas por la superposición en módulo  $S_1$ , superposición cuadrática modificada  $S_3$ , el medio aritmético de  $S_1$  y  $S_2$ , y una combinación lineal,  $S_5$ , de  $S_1$  y  $S_2$ . Las fórmulas utilizadas fueron:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{10} |S_i| \tag{29}$$

$$S_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} S_i^2} \quad (30)$$

$$S_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} S_i^2 + \sum_{i \neq j} \frac{S_i S_j}{1 + \epsilon_{ij}^2}} \quad (31)$$

$$S_4 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2) \quad (32)$$

$$S_5 = e S_1 + (1 - e) S_2 \quad (33)$$

donde:

$$\epsilon_{ij} = \left\{ \frac{\omega_i \cdot \omega_j}{4} \right\} t_0; t_0 = \text{duración del sismo}; e = \text{constante.}$$

La constante  $e$ , que aparece en la relación 33, fue determinada separadamente para deformaciones, esfuerzos de corte y momentos de flexión para cada estructura sometida a la acción de un terremoto dado, usando el método de los mínimos cuadrados. Los gráficos con las estimaciones de la respuesta como fracción de la respuesta exacta han sido omitidos por falta de espacio.

### CONCLUSIONES

La superposición en módulo,  $S_1$ , conduce siempre a estimaciones de la respuesta por exceso, en tanto que la superposición cuadrática,  $S_2$ , y la superposición cuadrática modificada,  $S_3$ , lleva generalmente a estimar la respuesta exacta por defecto.  $S_2$  y  $S_3$  resultan iguales para todo fin práctico.

Es posible estimar los valores máximos de los desplazamientos, momentos de flexión y esfuerzo de corte, para estructuras de inercia variables deformables sólo por corte, mediante criterios de superposición modal mejores que la superposición en módulo y que las superposiciones cuadráticas.

Un criterio simple de superposición modal permite estimar en buena forma la respuesta máxima de las estructuras de inercia variable consideradas cuando su base es sometida a la acción de terremotos:

$$S = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$$

donde  $S_1$  y  $S_2$  son las estimaciones obtenidas mediante los criterios de superposición en módulo y cuadrático, respectivamente.

Es posible emplear la relación que permite evaluar las raíces de la ecuación

característica en función de  $\beta$  y del orden del modo que se presenta en este trabajo, incurriendo en errores bastante reducidos.

Empleando las Figs. 5a, 5b y 5c, basta haber determinado las masas equivalentes para un valor de  $\beta$  dado, para obtener todas las masas equivalentes para otro valor de  $\beta$ .

#### REFERENCIAS

1. ESTEVA, L. y ROSENBLUETH, E. Diseño Sísmico de Edificios. *Primeras Jornadas Argentinas de Ingeniería Antisísmica*, San Juan - Mendoza, abril 1962.
2. ARIAS, A., HUSID, R. y MONGE, J. Comments on the new chilean seismic code for building. *Proceeding of the 4th W.C.E.E.*, Chile, enero 1969.
3. International Association for Earthquake Engineering. *Earthquake - Resistant Regulations, a world list*, Tokyo, 1973.
4. Gazzetta Ufficiale Della Repubblica Italiana, Parte Prima. *Disposizioni concernenti l'applicazione delle norme tecniche per le costruzioni in zone sismiche*, (abril 8, 1975), pp. 1 - 8, Roma, Italia.
5. HUSID, R. *Estudio teórico sobre la repartición vertical de fuerzas sísmicas en edificios*. Tesis para optar al título de Ingeniero Civil Estructural, Universidad de Chile, 1960.
6. HUSID, R. y RONNBERG, C. Exact response and modal superposition techniques of bending structures with earthquake excitation. *4th. Symposium on Earthquake Engineering*, Roorkee, India, noviembre 1970.
7. RUMMAN, W.S. Earthquake forces in reinforced concrete chimneys. *Journal of the Structural Division, ASCE*, diciembre 1967.
8. HUSID, R. y MARCUS, J. Solicitaciones laterales en chimeneas uniformes. Influencia del amortiguamiento viscoso en la respuesta. *Revista del IDIEM*, vol. 12, n° 1, pp. 15 - 42, Santiago, Chile.
9. HOUSNER, G.W. Earthquake resistant design based on dynamic properties of earthquakes. *Journal of the American Concrete Institute*, vol. 28, n° 1, julio 1956.
10. HUSID, R., ASFURA, A. y ASTROZA, M. Vibraciones de chimeneas de inercia variable. *V Simposio Panamericano de Estructuras*, abril 1974, Buenos Aires, Argentina.
11. AMBRASEYS, N.N. The seismic stability of earth dams. *Proceedings, 2th World Conference on Earthquake Engineering*, vol. 2, pp. 1345 - 1363, Tokyo, Japón 1960.
12. AMBRASEYS, N.N. On the shear response of a two dimensional truncated wedge subjected to an arbitrary disturbance. *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 50, n° 1, pp. 45 - 56, enero 1960.
13. AMBRASEYS, N.N. y SARMA, S.K. The response of earth dams to strong earthquakes, *Géotechnique*, vol. 17, n° 3, septiembre 1967.
14. HUSID, R. y SAAVEDRA, P. Estimación de la respuesta máxima de tranques de tierra sometidos a la acción de terremotos. *III Congreso Mexicano de Ingeniería Sísmica*, noviembre 1971, Acapulco, México.
15. HUSID, R. Características de terremotos, análisis general. *Revista del IDIEM*, vol. 8, n° 1, (mayo 1969), pp. 21 - 42.
16. HOUSNER, G.W. y JENNINGS, P.C. Generation of artificial earthquakes. *Proceeding ASCE*, vol. 90, n° EM1 (february 1964).
17. HUSID, R. Artificial earthquakes. *Bulletin of the International Institute of Seismology and Earthquake Engineering*, vol. 11, 1973, pp. 169 - 192, Tokyo, Japón.
18. HUSID, R. Earthquakes. *Spectral analysis and characteristics of accelerograms as a basis of earthquake-resistant design*. Bilingual Edition, 447 pp., Editorial Andrés Bello, mayo 1973, Santiago, Chile.

**.. STRUCTURES WITH VARIABLE INERTIA SUBJECTED TO EARTHQUAKES****SUMMARY:**

*The earthquakes response of structures with deformation essentially by shear, homogeneous, isotropic, fixed at their base, with trapezoidal cross-section is studied. Exact formulas are derived for the displacement, shear, and bending moment, as a function of time and position, using dimensionless parameters. The frequency equation was solved for 14 different structures, which cover well all the cases of practical interest. The first 10 normal modes of vibration were determined and the relationship between the roots of the frequency equation and the order of modes is studied. Equivalent masses for the normal modes considered are calculated as a fraction of the total mass of the structure and a study is made of their variation when the cross-section is modified. Using 5 modal superposition techniques the maximum displacement, shear and bending moment, as a function of position, are estimated.*