

AVANCES RECIENTES EN LA CARACTERIZACION DE MOVIMIENTOS SISMICOS EN ROCAS Y SUELOS DURANTE TERREMOTOS DE MAGNITUD MODERADA*

Ricardo DOBRY**

Izzat M. IDRIS***

Don TOCHER***

RESUMEN

El artículo incluye resultados de investigaciones recientes sobre las características ingenieriles de los movimientos sísmicos horizontales en roca y suelo, durante terremotos moderados ($M \leq 7$) de falla superficial. Los estudios fueron hechos en el dominio de los tiempos, e incluyeron la división de los acelerogramas considerados en fases y la correlación de estas fases con la llegada de diferentes ondas sísmicas al lugar. Para ilustrar el método propuesto se utilizan acelerogramas de movimiento fuerte, obtenidos en California tanto en zonas rocosas como en suelo, durante los temblores de San Francisco en 1957 y de San Fernando en 1971.

INTRODUCCION

Este trabajo resume resultados obtenidos recientemente acerca de las propiedades de aceleraciones horizontales, registradas en roca y suelo durante terremotos superficiales de tamaño moderado. Algunos de estos resultados han sido incluidos

* Presentado a la Conferencia Centroamericana de Ingeniería Sísmica de San Salvador, enero 9 - 14 de 1978.

** Profesor Asociado Rensselaer Polytechnic Institute, U.S.A.

*** Socio Principal Woodward - Clyde Consultants, U.S.A.

con mayor detalle en otras publicaciones^{1,2}. El método usado pone énfasis en la división de acelerogramas existentes en fases sucesivas, y en la correlación de estas fases con las llegadas al lugar de diferentes trenes de ondas sísmicas.

Housner³ propuso caracterizar la severidad o intensidad del movimiento del terreno en un lugar mediante el uso conjunto de dos parámetros: uno correspondiente al nivel y el otro a la duración de la fase fuerte del movimiento. La Fig. 1 presenta una versión ligeramente modificada de esta proposición de Housner. El gráfico de la Fig. 1 corresponde, para un acelerograma horizontal dado $a(t)$, a la acumulación de la energía (o Intensidad de Arias) $\int_0^t a^2 dt$, con el tiempo t , en t se mide a partir del comienzo del registro. Se define como fase fuerte aquella parte del acelerograma que, en un gráfico como el de la Fig. 1, corresponde aproximadamente a una línea recta empinada. Las características de esta fase fuerte se describen mediante los dos parámetros de intensidad (\bar{a}, Δ) . El nivel de aceleraciones durante la fase fuerte se mide mediante $\bar{a} = \sqrt{P}$ (en que P es la pendiente promedio de la recta), y $\Delta = t_2 - t_1$, es la duración de la fase. Es posible que \bar{a} es idéntica con la aceleración cuadrática media de la fase fuerte:

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{1}{\Delta} \int_{t_1}^{t_2} a^2 dt} \quad 1$$

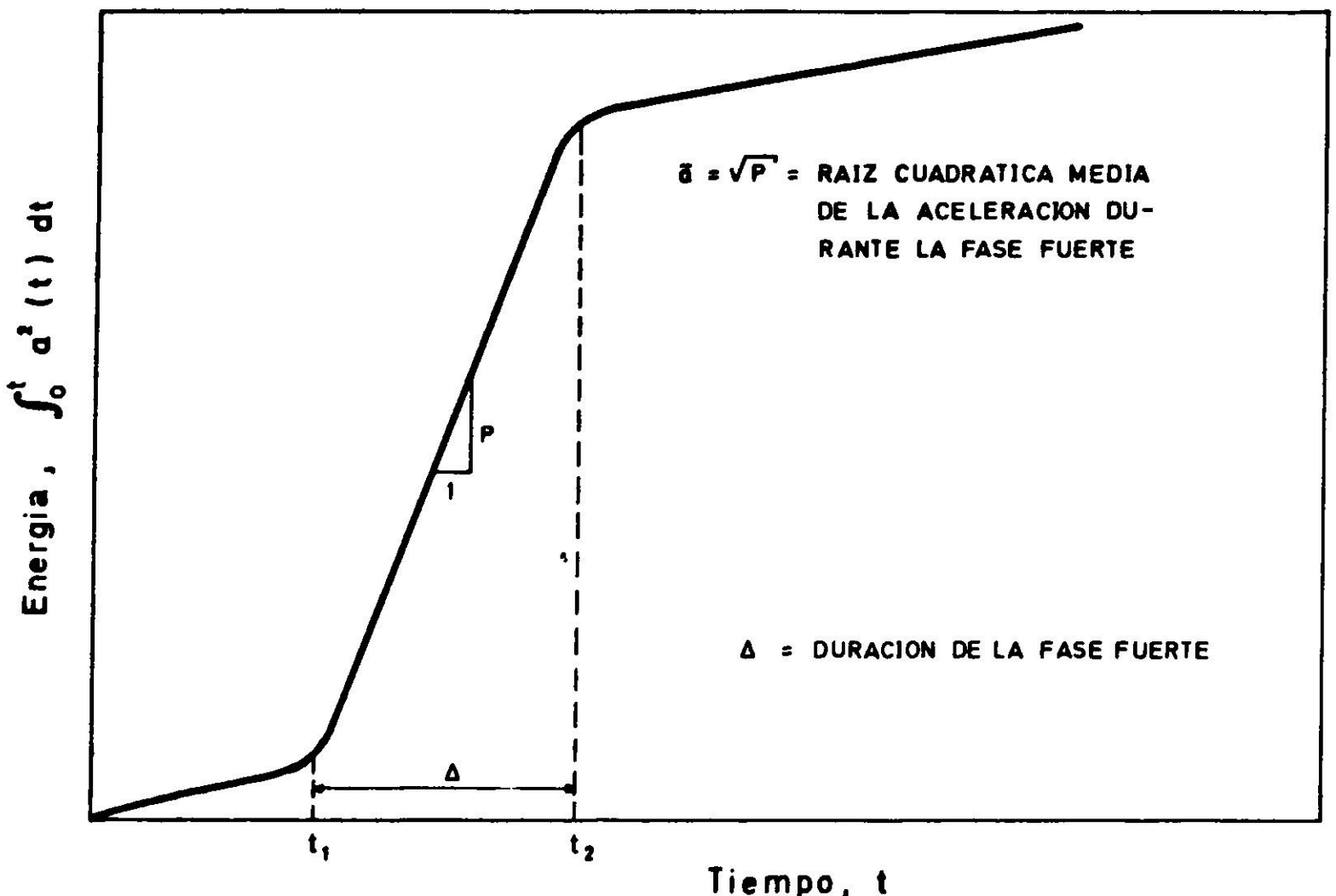


Fig. 1. Caracterización propuesta para aceleraciones horizontales en sitios rocosos.

Para el caso de acelerogramas reales, en que se dispone de dos componentes horizontales ortogonales $a_x(t)$ y $a_y(t)$, \bar{a} y Δ pueden ser calculados para cualquiera de estas componentes. También es posible considerar la resultante vectorial de las aceleraciones horizontales, $a_{xy}(t)$, que es $a^2_{xy} = a^2_x + a^2_y$, en todo instante. Para todo momento t , la energía total acumulada correspondiente a a_{xy} es igual a la suma de las energías de las componentes⁴:

$$\int_0^t a^2_{xy} dt = \int_0^t a^2_x dt + \int_0^t a^2_y dt \quad 2$$

A partir de una curva de $\int_0^t a^2_{xy} dt$ versus t , tal como la de la Fig. 1, es posible obtener nuevos parámetros de intensidad (\bar{a}_{xy} , Δ) en la misma forma descrita anteriormente. Estos nuevos parámetros miden las características de la llegada al lugar de la energía total contenida en el movimiento horizontal del terreno, independientemente de la dirección de este movimiento, y ellos tienen la ventaja de ser invariantes respecto de la orientación de las componentes x , y . Una curva tal como la mostrada en la Fig. 1, sea para a_{xy} , a_x o a_y se denomina gráfico de Husid.

La caracterización de aceleraciones horizontales mediante los dos parámetros (\bar{a} , Δ), calculados sea para las componentes o para la resultante vectorial, es particularmente apropiada para movimientos fuertes en roca, que corresponden a sitios cerca de una falla superficial, durante terremotos de tamaño moderado (magnitud $\lesssim 7$, longitud de ruptura de la falla $\lesssim 50 - 80$ km). Se ha observado que los gráficos de Husid obtenidos de estos movimientos tienen una forma similar a la de la Fig. 1, con la fase fuerte contribuyendo la mayor parte de la energía del acelerograma. La caracterización de movimientos sísmicos en suelo en el caso general; o en sitios rocosos 1) a distancias grandes de la falla, 2) durante terremotos profundos, y 3) durante terremotos de mayor magnitud, parece ser más complicada. Parte de la evidencia existente al respecto es utilizada más adelante para justificar e ilustrar estas conclusiones.

INFLUENCIA DEL TAMAÑO DEL TERREMOTO SOBRE EL MOVIMIENTO EN SITIOS ROCOSOS

El tamaño de un terremoto se define usualmente mediante conceptos tales como magnitud o momento sísmico. Es también posible definir este tamaño mediante otros parámetros ligados al mecanismo de falla, los que están correlacionados con la magnitud y el momento. Por ejemplo, es un hecho bien establecido que, a medida que la magnitud del terremoto aumenta, la longitud de ruptura y el desplazamiento permanente de la falla también aumentan. Para los propósitos de este trabajo, es conveniente utilizar la longitud de ruptura de la falla, L , como

medida básica del tamaño de un terremoto. La Fig. 2 muestra algunos de los factores sismológicos más importantes que influyen en las aceleraciones del terreno en sitios rocosos tales como A o B, o en sitios aluviales tales como C. Se supone que un terremoto ocurre en la falla esquematizada en la figura, con la ruptura de la misma a lo largo de la longitud $L = FG$. La ruptura comienza en el punto F (foco) y se propaga a lo largo de la falla con una velocidad de ruptura V , hasta que termina en el punto G. La situación mostrada en la Fig. 2 es similar, aunque no idéntica, a la que existió durante el terremoto de San Fernando, California, 1971 (Aunque la figura muestra el punto G en la superficie del terreno, en el caso general el término de la ruptura puede estar localizado a cierta profundidad). La duración total requerida para el desarrollo completo de la ruptura, la cual es evidentemente un parámetro del mecanismo de falla, es de $d \approx L/V$.

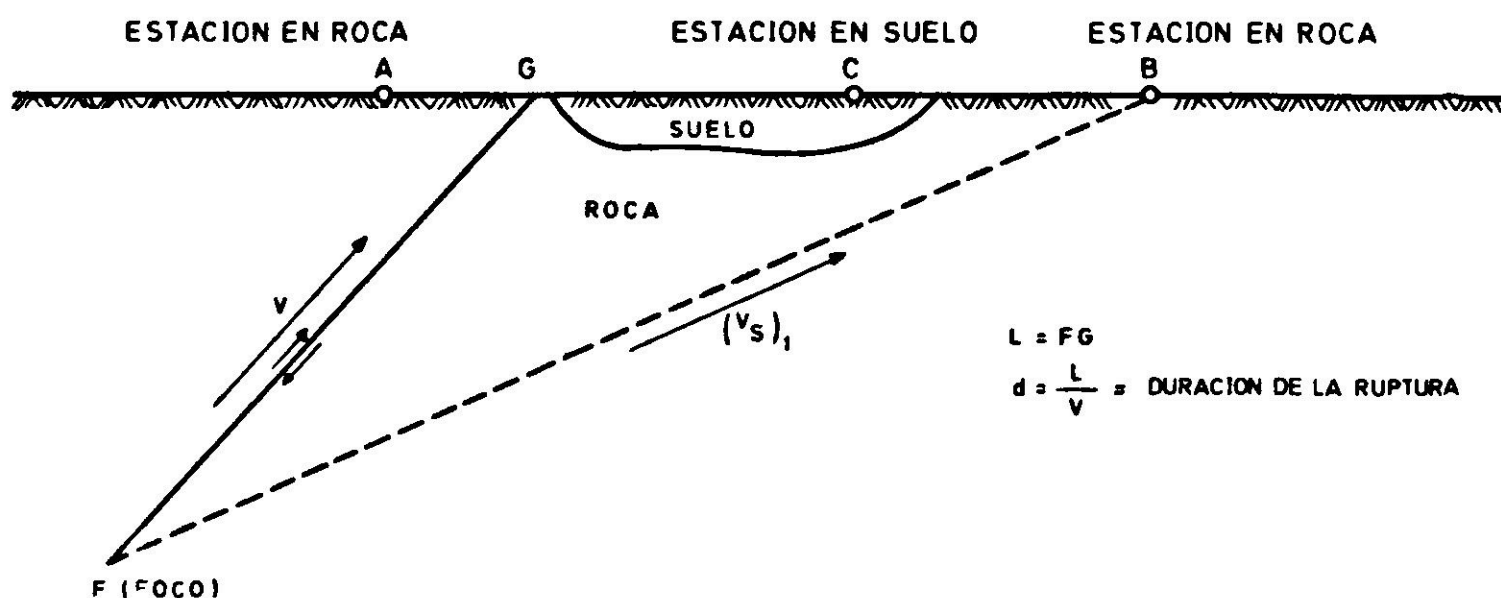


Fig. 2. Factores que determinan la duración de la fase fuerte del movimiento.

Datos presentados por Geller⁵ sugieren que para $L < 50$ km, el valor de la velocidad es $V \approx 2.5$ km/s, y por lo tanto $d \approx L/2.5$. La Fig. 3 ilustra esta última correlación entre d y L .

El frente de ruptura, a medida que se proponga con velocidad V a lo largo de la falla, radia energía de alta frecuencia, principalmente en la forma de ondas S (o de corte). Análisis realizados en acelerogramas horizontales obtenidos en sitios rocosos, muestran que la fase fuerte de los registros está asociada con la llegada al lugar de aquellas ondas S que viajaron a lo largo de una trayectoria directa entre el frente de ruptura y la estación. Para un registro obtenido en una estación tal como B en la Fig. 2, el comienzo de la fase fuerte en el instante t_1 indica la llegada del primer tren de ondas S, generadas en el foco F y que viajaron a lo largo de una trayectoria tal como FB. El instante t_2 corresponde a la llegada del último tren de ondas S directas, generadas cerca de G y que viajaron por una trayectoria tal como GB. Por lo tanto, el valor de la duración Δ de la fase fuerte debería estar controlada principalmente por la duración en la falla, d , y Δ debería también correlacionar con el tamaño del terremoto.

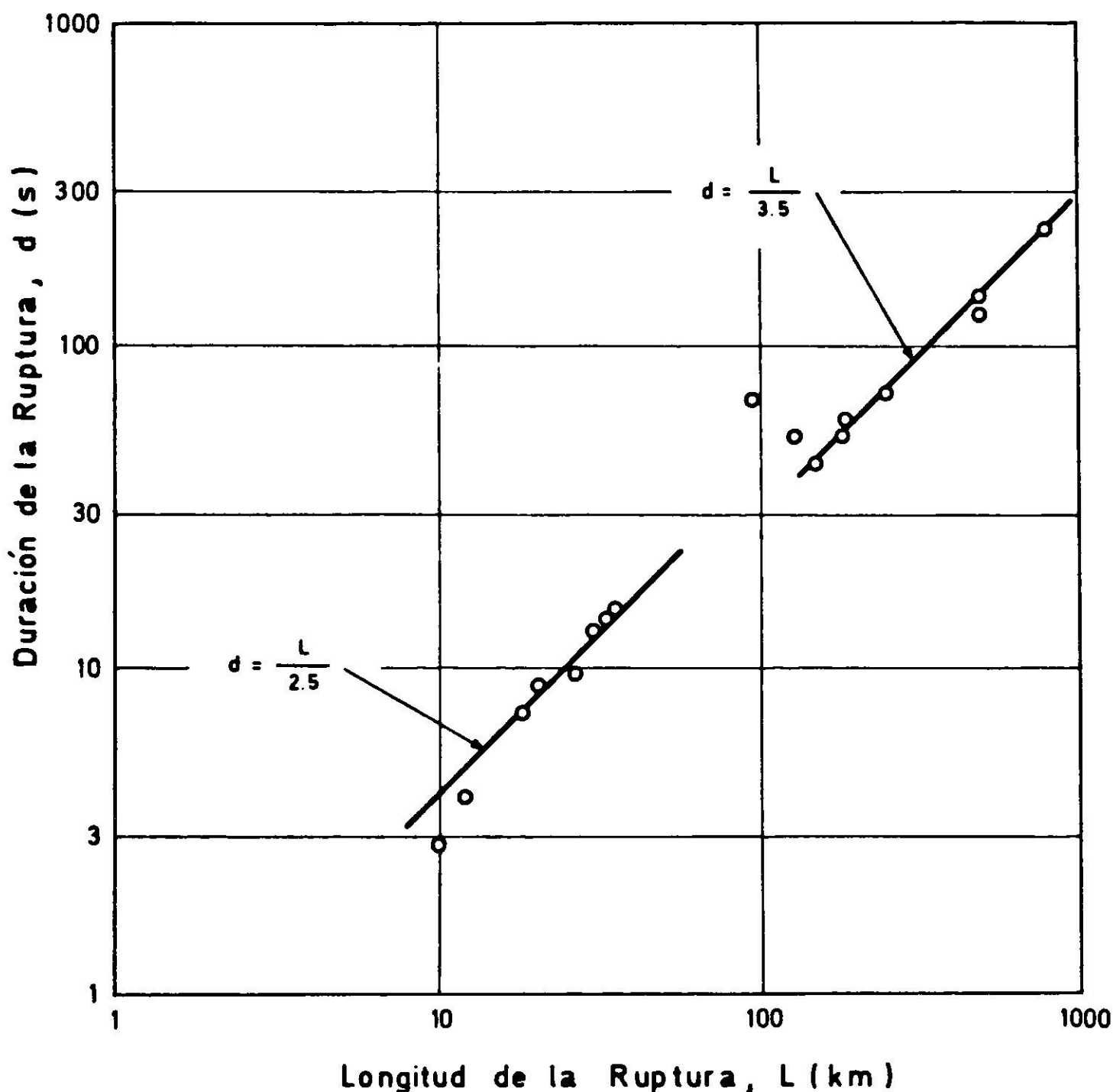


Fig. 3. Relación entre la duración de la ruptura y el tamaño del terremoto (datos obtenidos de Geller, 1976).

Las Figs. 4 y 5 ilustran esta influencia del tamaño del terremoto sobre la duración de la fase fuerte para registros en roca. La Fig. 4a incluye un acelerograma obtenido en 1957 en Golden Gate Park, San Francisco, California, durante un temblor de magnitud 5.3 y una longitud de ruptura de la falla estimada en $L \approx 3-4$ km. La distancia entre la estación y la falla fue 10-15 km, y una estimación razonable de la duración de ruptura es $d = 1-1.5$ s. (Los datos anteriores correspondientes a este sismo fueron obtenidos o estimados a partir de la información entregada por Hudson y Housner⁶). La duración de la fase fuerte estimada para el registro de Golden Gate es $\Delta = 1.5$ s. La Fig. 4b presenta otro acelerograma en roca, obtenido en el Tranque Pacoima durante el sismo de San Fernando, California en 1971. Este terremoto tuvo una magnitud 6.6, una longitud de ruptura $L = 15-23$ km y una duración en la falla $d = 6-9$ s. La locali-

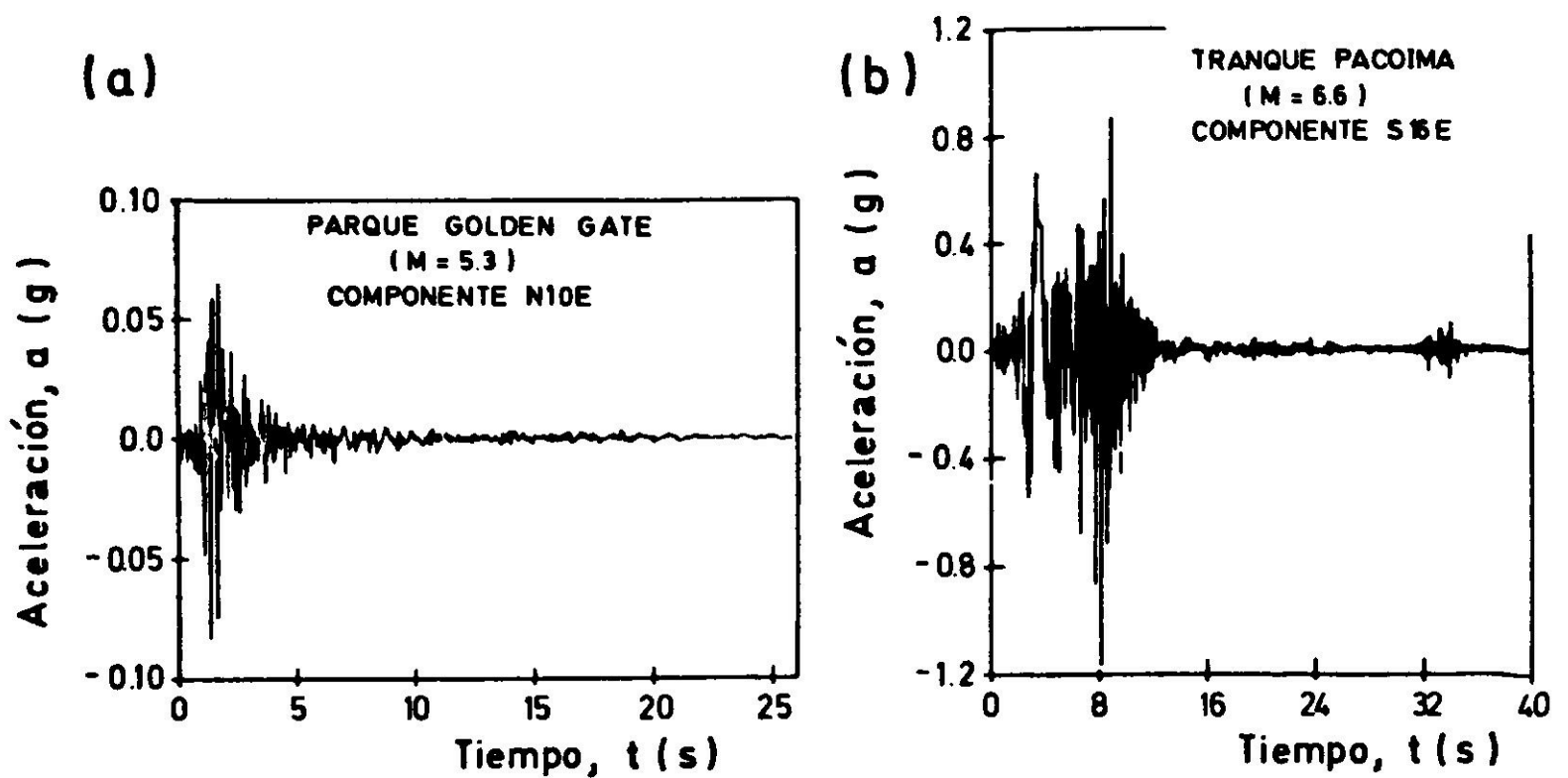


Fig. 4. Acelerogramas en roca para diferentes tamaños de terremoto.

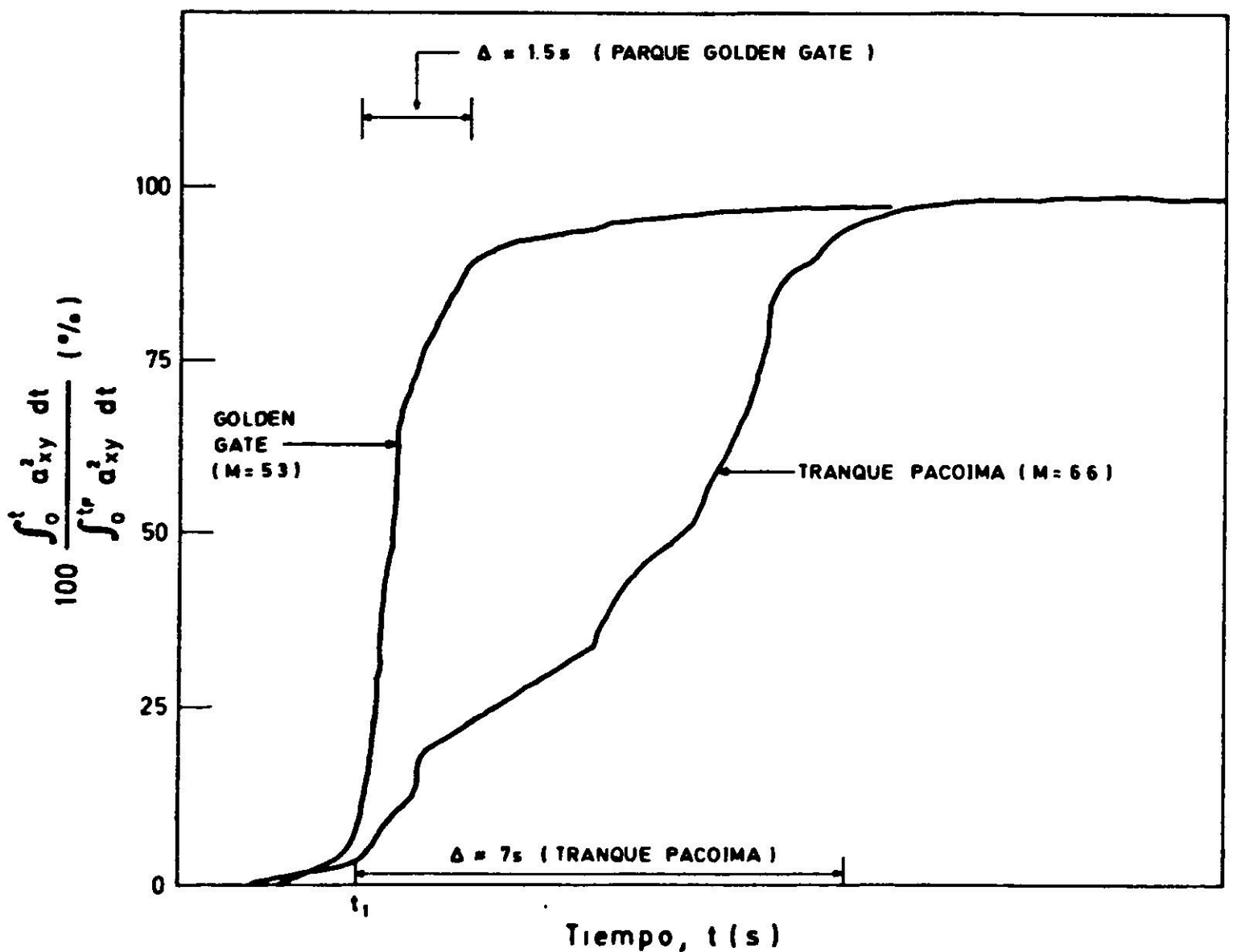


Fig. 5. Gráficos normalizados de Husid para aceleraciones horizontales en roca.

zación del Tranque Pacoima con respecto a la falla era similar a la de la estación A en la Fig. 2, con la distancia $AG \approx 5$ km. La duración de la fase fuerte estimada para el registro de Pacoima es $\Delta = 7$ s.

En resumen, para ambos registros incluídos en la Fig. 4, $\Delta \approx d$, y tanto d como Δ aumentan a medida que crece el tamaño del terremoto, sea que este último se mida por la magnitud o por la longitud de ruptura de la falla. Esta influencia del tamaño del sismo sobre Δ se puede apreciar también en la Fig. 5, la que incluye los gráficos de Husid calculados para el vector de aceleraciones horizontales, así como valores estimados para t_1 , t_2 y Δ en ambos casos. En la Fig. 5, y con el fin de facilitar la comparación de las dos curvas, los valores de $\int_0^t a^2_{xy} dt$ se han normalizado respecto a su valor al final del movimiento, $\int_0^t Fa^2_{xy} dt$, y los ejes de los tiempos se han desplazado para hacer coincidir el instante t_1 en ambos registros.

En acelerogramas en roca tales como los de la Fig. 4, hay otras fases presentes además de la fase fuerte. Los movimientos antes de t_1 corresponden a la llegada de ondas P (o de compresión), que vienen del foco y del frente de ruptura; estas ondas viajan más rápido pero transportan menos energía en la forma de movimientos horizontales que las ondas S . Los movimientos que ocurren después de t_2 son más complicados. Ellos incluyen ondas P y S que han sido reflejadas y refractadas en una variedad de formas, y que llegan al lugar después de haber seguido una multiplicidad de trayectorias diferentes. Para sitios más distantes de la falla, estas llegadas de ondas de trayectoria múltiple después de t_2 incluyen también ondas superficiales. En el caso de estaciones en roca cercanas a la falla, es posible adoptar la proposición de Housner, la cual desprecia los movimientos antes de t_1 y después de t_2 , y considera sólo la fase fuerte para fines prácticos. Sin embargo, para distancias mayores, asociadas 1) con estaciones lejos de la falla, o 2) con terremotos de gran magnitud y longitud de ruptura medida en centenares de kilómetros, las ondas de trayectoria múltiple aumentan en importancia relativa y no pueden ser ignoradas. Esta última conclusión es especialmente válida para las ondas superficiales y para el diseño sísmico de estructuras de período largo.

Se vio más arriba que la fase fuerte de los registros en roca corresponden básicamente a la llegada de ondas S provenientes directamente de una ruptura que demora d segundos en completarse. Sin embargo, esto no significa que siempre deba ser $\Delta = d$. Volviendo al esquema de la Fig. 2, la duración de la fase fuerte en la estación rocosa B sería:

$$\begin{aligned} \Delta_B &= d + \left[\frac{GB}{(V_s)_1} - \frac{FB}{(V_s)_2} \right] \\ &= \frac{L}{V} + \left[\frac{GB}{(V_s)_1} - \frac{FB}{(V_s)_2} \right] \end{aligned} \tag{3}$$

en que $(V_s)_1$, $(V_s)_2$, son las velocidades de ondas de corte a lo largo de las trayectorias GB y FB, respectivamente. Esto significa que Δ puede ser mayor o menor que d , dependiendo del valor y signo del término direccional $[GB/(V_s)_1 - FB/(V_s)_2]$. Si se supone que $(V_s)_1 = (V_s)_2 < V$, resulta $\Delta_B < d$; en

cambio, para una estación en roca al otro lado de la falla, tal como A, $\Delta_A \geq d$, en que el sentido de la desigualdad depende de la distancia AG (para $AG = AF$, $\Delta_A = d$). Este efecto direccional ha sido discutido en la literatura^{7,8}, en relación con observaciones de las distribuciones de daños producidos por los terremotos de Kern County, California en 1952, y Guatemala en 1976.

El uso práctico de la caracterización propuesta para sitios rocosos requiere comprender y cuantificar la forma en que los parámetros definidos para el movimiento horizontal, a_{xy} y Δ , dependen tanto del mecanismo de falla como de las propiedades de la corteza terrestre en la región. La discusión anterior entrega un posible modelo cuantitativo para el caso de Δ , dado por la Ec. 3. La cuantificación de a_{xy} requiere evidentemente de estudios adicionales. Es razonable suponer que factores importantes en la determinación de a_{xy} deberían ser, entre otros: la disminución de esfuerzos en la falla durante el sismo, la característica de la radiación en la falla (*radiation pattern*), y los efectos direccionales, así como las propiedades de la corteza terrestre y la distancia entre la falla y la estación.

MOVIMIENTO DEL TERRENO EN SITIOS ROCOSOS Y DE ALUVION: SAN FERNANDO 1971

La Figs. 5 y 6 y la Tabla I presentan resultados correspondientes a cinco estaciones localizadas en áreas rocosas que registraron durante el terremoto de San Fernando. La localización de estas estaciones y otras características de los acelerogramas fueron presentadas en otras publicaciones^{1,2}. Tal como se explicó más arriba, el Tranque Pacoima estaba aproximadamente a 5 km al norte de la traza de la falla, en una posición similar a la de A en la Fig. 2. Las otras cuatro estaciones estaban localizadas 16 a 25 km al sur o SE de la traza, en posición similar a B

TABLA I

ACELERACIONES HORIZONTALES EN AREAS ROCOSAS SAN FERNANDO 1971

Estación	Distancia a traza superficial de la falla (km)	$\Delta = t_2 - t_1$ (seg)	a_{xy} (g)	$(a_x)_{mdx}$ (g)	$(a_y)_{mdx}$ (g)
Tranque Pacoima	5	7	0.37	1.17	1.08
3838 Lankershim Blvd,	16	4 - 6	0.07	0.17	0.15
Observatorio Griffith	18	4 - 6	0.08	0.18	0.17
Agua y fuerza	25	4 - 6	0.06	0.17	0.13
445 Figueras	25	4 - 6	0.06	0.15	0.12

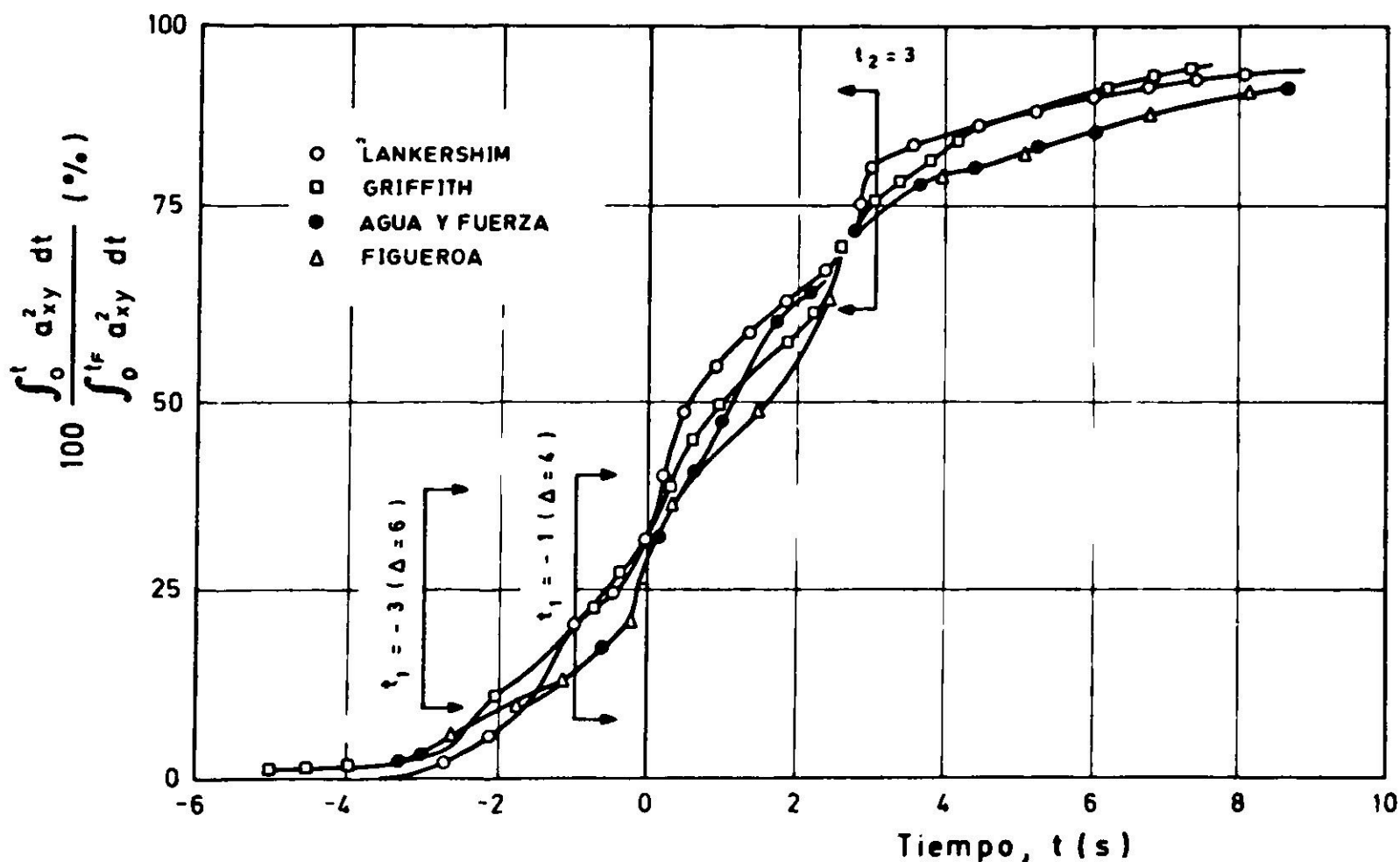


Fig. 6. Gráficos normalizados de Husid para aceleraciones horizontales en roca, San Fernando 1971.

en la Fig. 2. Los gráficos normalizados de Husid correspondientes a a_{xy} fueron calculados para todos estos registros en roca, y se presentan en las Figs. 5 y 6. En la Fig. 6 los ejes de los tiempos fueron desplazados hasta lograr la coincidencia entre el comienzo y el fin de la fase fuerte de los cuatro gráficos. El fin de la fase fuerte, t_2 fue identificado claramente en los cuatro registros; por otra parte, el comienzo de la fase no es tan claro, y dos valores posibles fueron elegidos para el instante t_1 , los que se indican en la Fig. 6 y que corresponden a duraciones de la fase, $\Delta = 4$ s y $\Delta = 6$ s, respectivamente. Los valores de la aceleración cuadrática media, a_{xy} , calculados mediante la Ec. 1, no son muy sensibles a esta variación en el valor de t_1 , y se incluyen en la Tabla I. La Tabla I también presenta las aceleraciones máximas de ambas componentes, $(a_x)_{máx}$ y $(a_y)_{máx}$, para cada una de las estaciones.

La evidencia anterior indica que en Pacoima el movimiento horizontal durante el terremoto consistió básicamente de una aceleración vectorial cuadrática media, $a_{xy} = 0.37$ g ($g =$ aceleración de gravedad), sostenida durante alrededor de 7 segundos. Para las otras estaciones incluídas en la Tabla I, los movimientos del terreno fueron muy similares entre sí, y consistieron de una aceleración vectorial cuadrática media, $a_{xy} = 0.06$ a 0.08 g, mantenida durante $\Delta = 4$ a 6 s. La similitud de todas las curvas incluídas en la Fig. 6 muestra que la acumulación de energía del movimiento horizontal con el tiempo fue también muy parecida para estas cuatro estaciones. Por lo tanto, es posible concluir que, en una extensa área rocosa 16 a 25 km S y SE de la falla, el movimiento del

terreno tuvo una intensidad uniforme, la que se relaciona en forma simple con el modelo de falla y de propagación de ondas S propuesto en este trabajo. En particular, el hecho de que el valor $\Delta = \Delta_B = 4-6$ s para estas cuatro estaciones sea menor que $\Delta = \Delta_A = 7$ s para Pacoima, y también menor que $d = 6-9$ s en la falla, es consistente con el efecto direccional sugerido por la Ec. 3.

La Fig. 7 presenta la componente S90W del acelerograma registrado en roca en Lankershim Boulevard. El gráfico de Husid para a_{xy} , y los tiempos t_1 y t_2 correspondientes a la suposición $\Delta = 6$ s, que fueron incluidos en el Fig. 6, se presentan también en la Fig. 7 para Lankershim. Esta estación estaba localizada en los cerros de Santa Mónica, que confinan el Valle de San Fernando por el Sur. Cerca de Lankershim habían otras tres estaciones instaladas sobre los depósitos aluviales del valle, y localizadas en distintos puntos a lo largo de Ventura Boulevard. Estas tres estaciones en suelo corresponderían al punto C en el esquema de la Fig. 2, y estaban a distancias de la falla muy similares a la de Lankershim. Los tres registros obtenidos en Ventura son parecidos entre sí, y difieren del registro de Lankershim en la forma ilustrada en las Figs. 7 y 8. La Fig. 7 presenta la componente S81E y el gráfico de Husid para a_{xy} correspondientes al instrumento instalado en el número 15910 de Ventura. El gráfico de Husid de este acelerograma es muy parecido al gráfico correspondiente de Lankershim para tiempos menores que t_2 , indicando que el proceso de acumulación de energía fue similar en ambos lugares hasta el final de la fase fuerte. Por otra parte, para $t > t_2$, en el registro en suelo aparece una fase de período largo que no existe en el registro en roca. Esto se refleja en el valor de la energía $\int_0^t a^2_{xy} dt$, la que se estabiliza poco después de t_2 para el sitio rocoso, pero sigue aumentando durante unos 10-15 s adicionales en el movimiento del suelo. Esta fase de período largo ha sido interpretada como una onda superficial atrapada dentro del Valle de San Fernando, la cual viajó en el aluvión del valle y fue reflejada en las fronteras rocosas constituidas por los cerros circundantes. La importancia práctica de esta fase de período largo existente en el movimiento del suelo se demuestra en la Fig. 8, la que presenta la componente N79W obtenida en el subterráneo del edificio número 15250 de Ventura; en la misma figura se ha incluido el gráfico del desplazamiento relativo entre el techo del edificio y el subterráneo, medido en la misma dirección. En este edificio se produjo evidentemente un fenómeno de resonancia, causado por la similitud entre el período del movimiento del terreno después de unos 15 s de comenzado el registro, y el período fundamental del edificio en esa dirección ($T \approx 3$ s). En este caso, las características de la fase fuerte, asociadas con la llegada de ondas S directas, tuvieron poca importancia en el comportamiento de la estructura, y los movimientos responsables de los daños (tanto estructurales como no estructurales) sufridos por el edificio, fueron aquéllos asociados con ondas superficiales después que la fase fuerte había terminado. La existencia de esta fase de período largo ha sido observada también en otros acelerogramas en suelo, tanto en San Fernando en 1971,

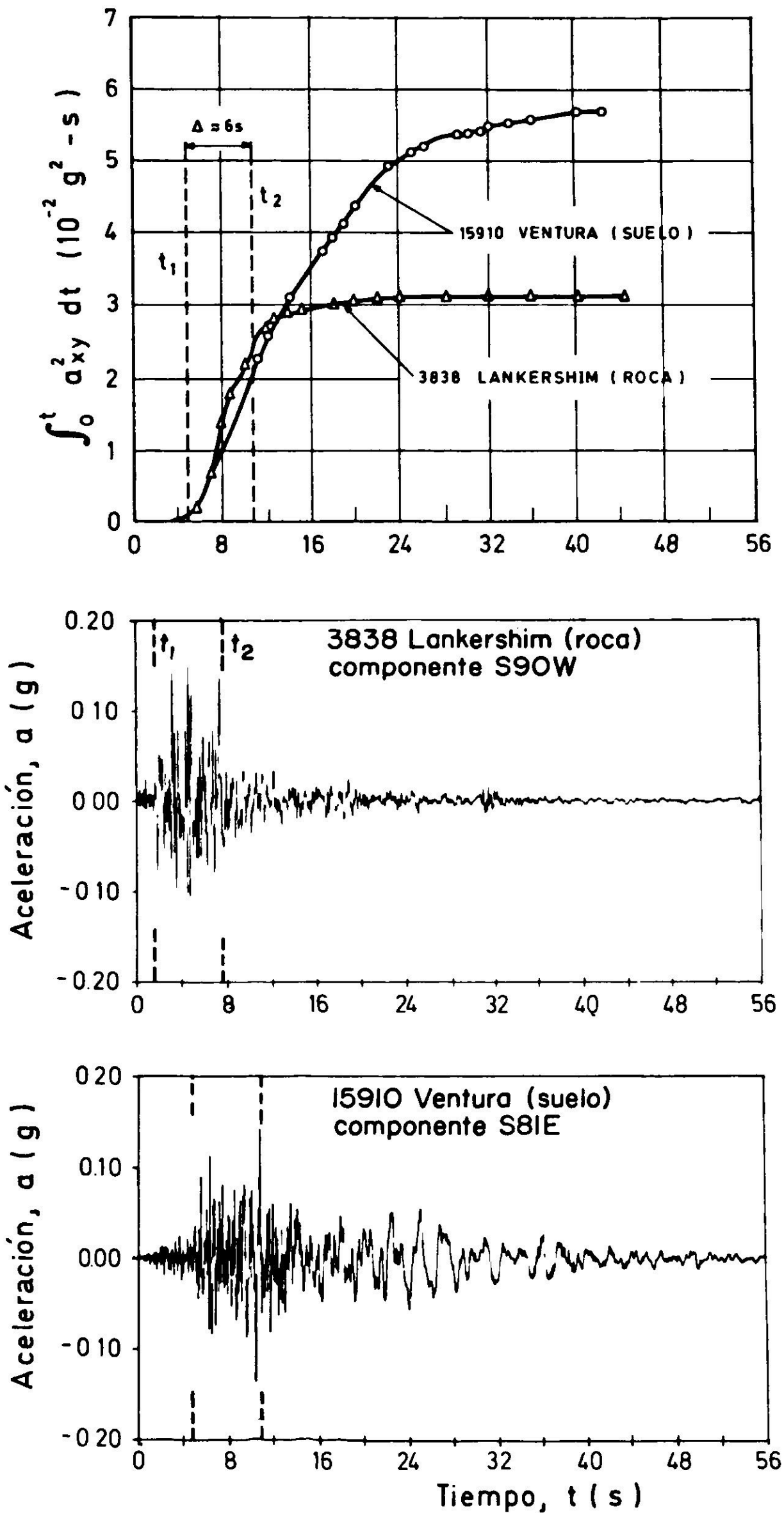


Fig. 7. Aceleraciones horizontales en roca y suelo, San Fernando 1971.

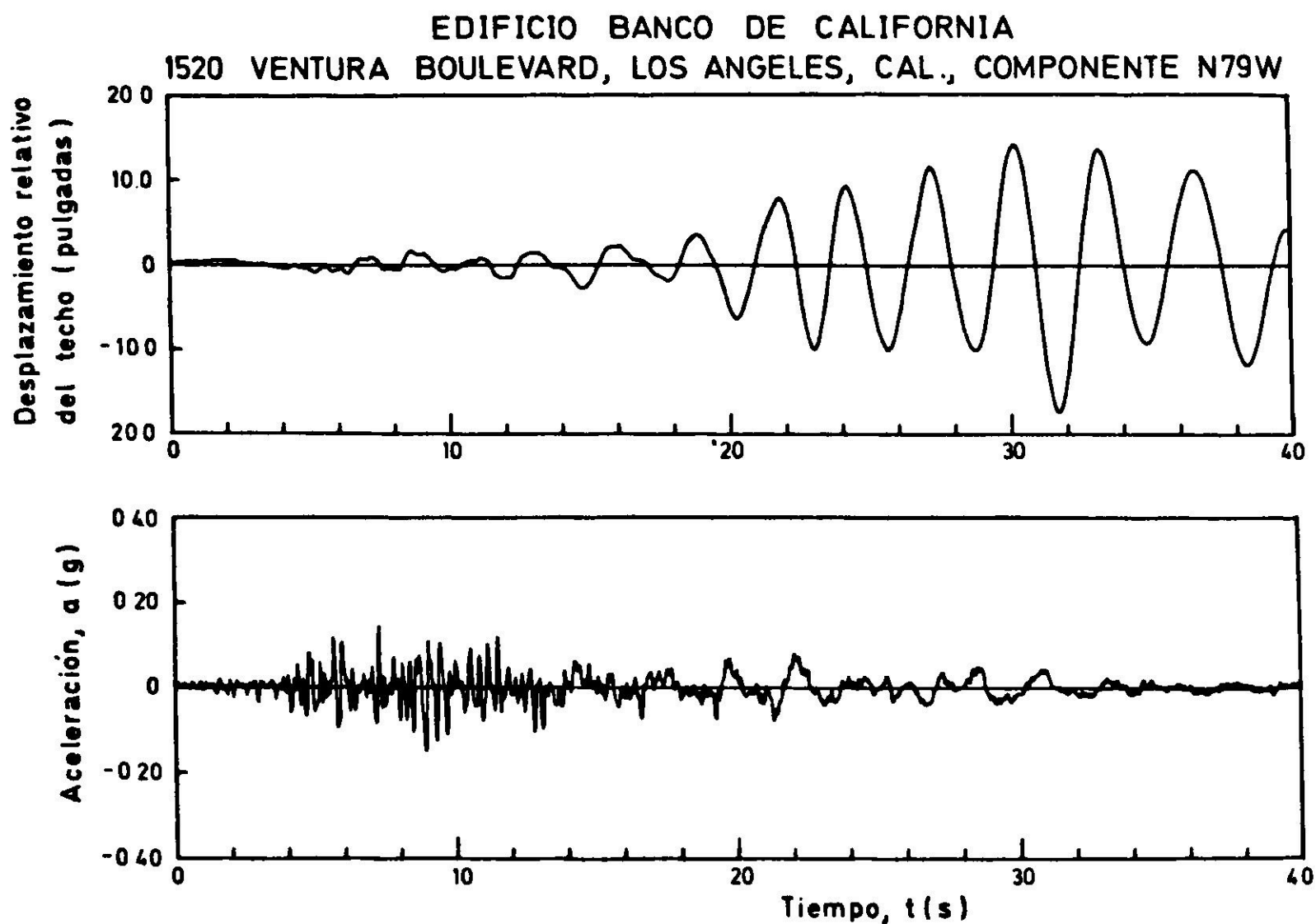


Fig. 8. Fase de período largo en suelo y respuesta de edificio alto, San Fernando 1971.

como en otros sismos. La explicación del origen de esta fase ha variado de un caso a otro. Tal como se discutió anteriormente, en San Fernando ella parece haberse debido a ondas superficiales. En el caso de un sitio sobre arcilla blanda en San Francisco, California, durante el temblor de 1957, la fase de período largo parece haberse debido a la excitación del período fundamental del perfil del suelo por ondas S indirectas, de trayectoria múltiple, que llegaron al lugar después de t_2 . Cualquiera que sea la explicación, esta fase es por lo menos parcialmente responsable por el mayor contenido de períodos largos en el movimiento en roca, observado por varios autores que han realizado estudios estadísticos del contenido de frecuencias de acelerogramas horizontales. Es posible que esta fase de período largo haya jugado un papel importante en el daño selectivo y el colapso de varios edificios altos fundados en sedimentos aluviales profundos, ocurrido en el Valle de Caracas, Venezuela, durante el terremoto de 1967¹⁰.

AGRADECIMIENTOS

Parte de los cálculos cuyos resultados se presentan en este trabajo, fueron realizados por Naneen Centola, y financiados por el programa BUILD de Rensselaer Polytechnic Institute. Los autores agradecen esta contribución, y también las sugerencias del Profesor Michael J. O'Rourke y del Ingeniero Abdón E. Espinosa.

REFERENCIAS

1. DOBRY, R.; IDRIS, I.M.; CHANG, C.Y. y NG, E. Influence of magnitude, site conditions and distance on significant duration of earthquakes, *Proceedings, 6th World Conference on Earthquake Engineering*, vol. 2, (1977), pp. 131-136, New Delhi, India.
2. DOBRY, R.; IDRIS, I.M. y NG, E. Duration characteristics of horizontal components of strong motion earthquake records, (1977), enviado para publicarse en el *Bulletin of The Seismological Society of America*.
3. HOUSNER, G.W. Measures of severity of earthquake ground shaking, *Proceedings, U.S. National Conference on Earthquake Engineering*, 1975, Ann Arbor, Michigan, pp. 25-33.
4. ARIAS, A. A measure of earthquake intensity, *Seismic design for nuclear power plants*, Robert Hansen, Editor, Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, Massachusetts, E.U.A. 1969.
5. GELLER, R.J. Scaling relations for earthquake source parameters and magnitudes, *Bulletin of The Seismological Society of America*, vol. 66 (octubre 1976), pp. 1501-1523.
6. HUDSON, D.E. y HOUSNER, G.W. An analysis of strong-motion accelerometer data from the San Francisco earthquake of march 22, 1957, *Bulletin of The Seismological Society of America*, vol. 48, (julio 1958), pp. 253-268.
7. BENIOFF, H. Mechanism and strain characteristics of the White Wolf fault as indicated by the aftershock sequence. *Earthquake in Kern County, California, during 1952*, G.B. Oakeshott, Editor, California Division of Mines, Bulletin 171, (1955), EUA.
8. ESPINOSA, A.F.; HUSID, R. y QUESADA, A. Intensity distribution and source parameters from field observations, *The Guatemala earthquake of february 4, 1976, Preliminary report*. U.S. Geological Survey Professional Paper 1002.
9. SINGH, R.D. et al (1977) Study of earthquake response of soft clay sites considering degradation effects, (en preparación 1977).
10. SEED, H.B.; WHITMAN, R.V.; DEZFULIAN, H.; DOBRY, R. e IDRIS, I.M. Relationship between soil conditions and building damage in the 1967 Caracas earthquake, *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, American Society of Civil Engineers*, vol. 98, SM8 (agosto 1972), pp. 787-806.

RECENT ADVANCES IN THE CHARACTERIZATION OF GROUND
MOTIONS ON ROCK AND SOIL DURING MODERATE
MAGNITUDE EARTHQUAKES

,

SUMMARY:

The results of some recent researches on the engineering characteristics of horizontal ground motions both on rock and soil during moderately strong ($M < 7$) shallow sources earthquakes are included in this paper. The studies were made considering time domains and they included the division in phases of the accelerograms taken in consideration, those phases are correlated with the arrival of the various seismic waves at the location. Strong motions accelerograms recorded in California in rocky zones as well as in soils during the San Francisco 1957 and the San Fernando 1971 earthquakes are used to illustrate the proposed method.