CALCULO DEL PERIODO FUNDAMENTAL DE VIBRACION DE EDIFICIOS CON RIGIDEZ DE CORTE *

Raúl Husid L.**

RESUMEN

Se examinan diversos métodos para el cálculo del período fundamental de edificios estructurados de manera que las rigideces de los elementos resistentes se pueden asimilar a rigideces de corte.

Se propone una fórmula de fácil aplicación que conduce a resultados suficientemente aproximados para los propósitos de la práctica, con un mínimo de cálculos numéricos.

INTRODUCCION

En el presente trabajo se examinan algunos de los métodos propuestos para el cálculo del período fundamental, aplicándolos a edificios estructurados de tal manera que las rigideces de los elementos resistentes se puedan asimilar a rigideces de corte; es decir, edificios cuya estructuración es tal que la deformación relativa entre pisos consecutivos es función sólo del esfuerzo de corte desarrollado entre ambos pisos.

*Este trabajo fue presentado en las Primeras Jornadas Chilenas de Ingeniería Antisísmica, Santiago, julio 1963.

**Profesor de Complementos de Matemáticas, Profesor Auxiliar de Análisis Vectorial y Mecánica Racional en Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile. Ingeniero Investigador del Instituto de Investigaciones y Ensayes de Materiales (IDIEM).

1.- FORMULA PROPUESTA EN LA ORDENANZA GENERAL DE CONSTRUCCIONES.

La Ordenanza General de Construcciones de Chile[1] dice en su Art. 253º.

"1.- El período vibratorio de obras de ingeniería en que una gran parte del peso actúa a una misma altura, como en los puentes, se calculará por la relación:

$$T = 0,2 \sqrt{\delta} \qquad (1)$$

siendo δ el desplazamiento del tablero (o dintel superior) producido por una fuerza horizontal de magnitud igual al peso P de la superestructura, y que actúa al nivel del tablero".

"2.- El período propio de estructuras de edificios hasta de 40 m de altura podrá ser avaluado por la misma fórmula $T = 0,2\sqrt{\delta}$, siendo en este caso δ el desplazamiento total del piso superior de la estructura, solicitada ésta por fuerzas horizontales que actúen al nivel de cada piso e iguales en magnitud al peso del piso más el peso de los semipilares adyacentes al piso considerado".

"3.- El período propio de estructuras de altura mayor de 40 m se determinará experimentalmente, si así lo exigiese la autoridad competente".

La ecuación (1) propuesta por la Ordenanza es exacta (salvo un redondeo de cifras) para sistemas de un grado de libertad. Proviene de la conocida fórmula para el período de un oscilador simple:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{mg}{kg}} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta}{g}} \qquad (2)$$

en que m es la masa, k es la constante elástica o rigidez del oscilador; δ, la deformación del oscilador bajo la acción de una fuerza horizontal igual al peso; y g, la aceleración debida a la gravedad.

Si se pone $g = 980$ cm/seg^2 en (2), resulta:

$$T = 0,2006 \sqrt{\delta} \qquad (3)$$

siempre que δ se mida en centímetros.

La fórmula no es aplicable sin modificación a estructuras de varios grados de libertad.

Sin embargo, la idea de utilizar una fórmula similar, siendo δ el desplazamiento total del piso superior, es interesante.

Tal como se la propone en la Ordenanza, la fórmula conduce, en el caso de estructuras de varios grados de libertad, a períodos más largos que los que da una teoría exacta Como se verá una leve modificación. justificada más adelante, permite lograr una fórmula que da resultados excelentes

En el Apéndice de la Ordenanza[1] se propone la fórmula:

$$T = 2\pi\gamma\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\gamma\sqrt{\frac{\delta}{g}} \tag{4}$$

en que γ aparece definido como sigue: "coeficiente que depende de la distribución de la masa"

En esta fórmula, k es la rigidez por piso, que se supone igual para todos ellos.

Mas adelante se propone una manera de avaluar γ, parámetro que no está dado en la Ordenanza y se establece que, para todo fin práctico, γ es independiente de la distribución de masas del edificio.

2.- FORMULA DE M.P. WHITE

Esta fórmula ha sido deducida por M.P. WHITE[2] adaptando la solución dada por Lagrange en su "Mécanique Analytique"[3] para las oscilaciones de una cuerda vibrante con masas iguales y equidistantes.

La fórmula es:

$$T_n = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2N+1}\cdot\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{5}$$

en que "n" es el orden del modo considerado.

En los casos en que las masas y rigideces de los pisos no sean respectivamente iguales, se aplicará (5) con el promedio de las masas y rigideces.

Esta fórmula aparece también propuesta en el Apéndice de la Ordenanza General de Construcciones[1] en el artículo 7, inciso 3.

3.- FORMULA DE M.G. SALVADORI

Es una modificación de la fórmula de WHITE. Esta fórmula[4] expresa el período en la forma siguiente:

$$T_n = \frac{4}{2n-1}\sqrt{\frac{N\Sigma M_j}{\frac{1}{H}\Sigma K_j h_j}} \tag{6}$$

en que:

M_j = masa del piso j
H = altura total
K_j = rigidez en el piso j
h_j = altura del piso j

En la deducción de esta ecuación se han introducido algunas aproximaciones que la hacen prácticamente inaplicable en la obtención de los períodos de las armónicas superiores.

Todas las fórmulas antes mencionadas son racionales desde el punto de vista del análisis dimensional, por lo tanto, son válidas cuando se utiliza un sistema racional de unidades.

4.- PROPOSICION DE UNA NUEVA FORMULA

En Chile se ha utilizado con frecuencia la fórmula (1) para calcular el período de edificios de varios pisos, interpretando δ en el sentido del Art. 253º, inciso 2, de la Ordenanza. Esta idea es interesante, pero, según veremos, para edificios de dos o más pisos resulta necesario modificar el coeficiente 0,2 que aparece en (1) para obtener buena aproximación.

Hemos encontrado que basta un solo coeficiente para distribuciones de masas y rigideces muy distintas.

Esta conclusión tan simple resulta un tanto sorprendente y lleva a afirmar que en (4) el parámetro γ no depende prácticamente de la distribución de las masas ni de la de rigideces.

El valor del coeficiente se ha deducido de modo que, si el número de pisos es infinitamente grande, el período fundamental de la estructura coincida con el período fundamental de una viga uniforme, empotrada en la fundación y libre arriba y que se deforma solamente por efecto del esfuerzo de corte.

El período fundamental de la viga en cuestión es:

$$T_1 = 4\sqrt{\frac{MH}{\mu AG}} \qquad (7)$$

en que:

M = masa total
H = altura total
μ = coeficiente de forma
A = sección transversal
G = módulo de elasticidad transversal

Por otro lado la flecha en la punta de la viga bajo la acción de cargas horizontales iguales al peso es:

$$\delta_v = \int_0^H \frac{Mg}{H} \frac{(H-x)}{\mu AG}\, dx$$

o sea:

$$\delta_v = \frac{MgH}{2\mu AG} \qquad (8)$$

Reemplazando (8) en (7) resulta:

$$T_1 = 4\sqrt{\frac{2\,\delta_v}{g}} \qquad (9)$$

Para el caso de un edificio con rigidez de corte, cuya masa pueda considerarse concentrada al nivel de los pisos, la flecha estática en la punta bajo la acción de fuerzas horizontales iguales a los pesos, en la hipótesis de que tanto las masas como las rigideces de los pisos son iguales entre sí, vale:

$$\delta = \frac{mg}{k} + \frac{2\,mg}{k} + \frac{3\,mg}{k} + \ldots\ldots + \frac{Nmg}{k}$$

es decir:

$$\delta = mg\,\frac{N\,(N+1)}{2\,k} \qquad (10)$$

en que:

δ = flecha estática en la punta del edificio

m = masa de cada piso

N = número de pisos

k = rigidez de cada piso

Introduciendo este valor de δ en la fórmula (4) se tiene:

$$T_1' = 2\,\pi\gamma\sqrt{\frac{mN(N+1)}{2\,k}} = 2\pi\gamma\sqrt{\frac{M(N+1)}{2\,k}} \qquad (11)$$

Por otro lado, la rigidez k de un trozo de viga de corte de altura h igual a la altura de un piso, es:

$$k = \frac{\mu AG}{h} \qquad (12)$$

Sustituyendo en (11), resulta:

$$T_1' = 2\,\pi\gamma\sqrt{\frac{M(N+1)\,h}{2\,\mu\,AG}}$$

y tomando en cuenta que:

$$N\,h = H \qquad (13)$$

se obtiene:

$$T_1' = 2\pi\gamma\sqrt{\frac{MH}{\mu AG}\cdot\frac{N+1}{2\,N}} \qquad (14)$$

El límite a que tiende esta expresión cuando N crece indefinidamente es:

$$T_1' = 2\pi\gamma\sqrt{\frac{MH}{2\,\mu AG}} \qquad (15)$$

Comparando esta expresión con (7) resulta:

$$\gamma = \frac{4\sqrt{2}}{2\,\pi} \qquad (16)$$

con lo cual se tiene finalmente, la misma ecuación (9) con $\delta_v = \delta$.

Se propone, entonces, utilizar la ecuación:

$$T_1 = 4\sqrt{\frac{2\delta}{g}} \qquad (17)$$

para el cálculo del período fundamental de edificios

Esta fórmula fue propuesta por el autor antes[8] sin dar a conocer los antecedentes que la justifican, dado el carácter del trabajo en que se mencionó.

5.- COMPROBACION DE LA FORMULA PROPUESTA Y COMPARACION CON LAS DE WHITE Y DE SALVADORI

Para averiguar los límites de validez de las fórmulas de White y de Salvadori y de la fórmula propuesta, se comparan a continuación los períodos obtenidos a partir de ellas con los períodos exactos. No se hace la comparación con la fórmula (1), dado que difiere de la propuesta sólo en un factor de proporcionalidad.

Para hacer la comprobación se han considerado estructuras con muy diversas distribuciones de masas y rigideces, incluso distribuciones tan arbitrarias que no se presentan en la práctica.

Los casos estudiados se dan en las Tablas I, II, III, IV, y VII,y totalizan 97 estructuras diferentes. En las Tablas V y VI* se dan las razones entre rigideces y distribuciones de masas de los edificios que aparecen en la Tabla VII.

En la Tabla I se puede apreciar que para distribuciones uniformes de masas y rigideces, la fórmula de White da resultados prácticamente exactos, la de Salvadori da resultados siempre por defecto y con un error máximo de 19,7% para el edificio de dos pisos, y, por último, la fórmula propuesta da resultados siempre por defecto y con un error máximo de 3,6% para el mismo edificio.

El error cometido al aplicar la fórmula propuesta para edificios como los recien descritos, decrece rápidamente al crecer el número de pisos, Así para 3 pisos este error vale 1,06%; para 6 pisos, 0,4%, y para 10 pisos, 0,14%.

En la Tabla II, que se refiere a edificios de 2 pisos observamos que, la fórmula propuesta da resultados excelentes y mejores que las fórmulas de White y Salvadori, salvo en la estructura N° 17, para la cual la fórmula de White da un valor levemente mejor.

Esto se nota aún más al determinar los errores máximos cometidos al calcular los períodos de los edificios de la Tabla II con las 3 fórmulas consideradas. Las fórmulas de White y Salvadori conducen a valores del período del orden de 1/6 y 1/8, respectivamente del período exacto para la estructura número

* Las Tablas I a VII aparecen al final del artículo.

25. La fórmula propuesta da para esta estructura un error del 9,8%.

En la Tabla III, edificios de 3 pisos, las fórmulas de White y de Salvadori dan, para la estructura N° 42, valores del período del orden de 1/6 y 1/7, respectivamente del valor exacto. La fórmula propuesta da un error de 9,7% para esta estructura.

Para la estructura Nº 54 (Tabla 4, edificios de 4 pisos) se produce una situación análoga.

En la Tabla VII, para edificios de 10 pisos, las fórmulas de White, Salvadori y propuesta presentan errores máximos de 30,9%, 34,3% y 7,2%, respectivamente en las estructuras 65, 65 y 76.

Después de este examen de la magnitud de los errores máximos cometidos al utilizar las tres fórmulas que comparamos para las 97 estructuras analizadas, podemos apreciar que la fórmula propuesta produce errores mucho menores que las dos restantes. Para las estructuras con masas y rigideces iguales por piso, la fórmula de White y la propuesta dan resultados excelentes.

La fórmula propuesta dio en todos los casos estudiados, errores menores del 10%, a pesar de haberse incluído algunas distribuciones de masas y rigideces que en la práctica usual no se encuentran.

Para las estructuras recién mencionadas las dos fórmulas restantes dan errores que en varios casos llegan a ser 9 veces los correspondientes a la fórmula que aquí se propone.

Se procedió a calcular exactamente el período fundamental de un edificio de 20 pisos con las siguientes características.

$$K_i = K_1\ (1{,}05 - 0{,}05N); \quad 1 \leq N \leq 17$$
$$K_{18} = K_{19} = K_{20} = 0{,}2\ K_1$$
$$m_i = m_1\ (1{,}05 - 0{,}05N); \quad 1 \leq N \leq 17$$
$$m_{18} = m_{19} = m_{20} = 0{,}2\ m_1$$

y resultó:

$$T_1 = 58{,}72 \sqrt{\frac{m_1}{k_1}}$$

Los resultados obtenidos aplicando las fórmulas de White, de Salvadori y la propuesta fueron respectivamente:

$$T_1 \sqrt{\frac{K_1}{m_1}} = 82{,}02; \quad T_1 \sqrt{\frac{K_1}{m_1}} = 80{,}00; \quad T_1 \sqrt{\frac{K_1}{m_1}} = 63{,}77$$

Se hicieron estos cálculos para mostrar que en casos como éste, en que:

$$\frac{\Sigma m_i}{m_1} = \frac{\Sigma K_i}{K_1}$$

las fórmulas de White y Salvadori dan errores que pueden llegar a ser muy elevados.

Para la estructura en estudio, los errores cometidos con las tres fórmulas anotadas más arriba son 39,7%: 36,2% y 8,5% respectivamente Nótese que para el edificio de 20 pisos con $m_i = m_1$ y $K_i = K_1$, las tres fórmulas daban errores pequeños (Tabla I)

6.-CALCULO DEL PERIODO DE UNA ESTRUCTURA DE 5 PISOS POR EL METODO DE RAYLEIGH Y COMPARACION DE ESE METODO CON EL PROPUESTO

En la discusión por John A. Blume del artículo de Salvadori ya citado[4], el primero de estos autores calcula el período de un edificio de 5 pisos por el método de Rayleigh. Reproducimos la tabla con los cálculos de Blume. La notación es obvia.

TABLA VIII

CALCULO DIRECTO DE LA FRECUENCIA APROXIMADA DEL PRIMER MODO SEGUN TABLA 9 DE BLUME[4]

i	M_i	W_i	ΣW	$K_i \times 10^{-3}$	$\frac{\Sigma W}{K_i}$	Δs	$(\Delta s)^2$	$W\Delta_s$	$W(\Delta s)^2$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
5	11,65	4,502	4,502	6,84	0,658	8,478	71,88	38,168	323,604
4	15,53	6,001	10,503	7,98	1,316	7,820	61,15	46,928	366,961
3	15,53	6,001	16,504	9,12	1,810	6,504	42,30	39,031	253,842
2	15,53	6,001	22,505	10,26	2,193	4,694	22,03	28,169	132,202
1	15,53	6,001	28,506	11,40	2,501	2,501	6,26	15,009	37,506
$\Sigma =$					8,478			167,305	1114,115

En la columna (7) aparece la cifra 8,478 que es la flecha estática del último piso, expresada en pulgadas, bajo la acción de fuerzas horizontales iguales a los pesos.

Aplicando la fórmula propuesta resulta:

$$T_1 = 0,8379 \text{ seg}$$

Las columnas (7), (8), (9) y (10) son necesarias para aplicar el principio de Rayleigh. Por este método, Blume encuentra:

$$T_1 = 0{,}8249 \text{ seg}$$

El valor exacto, calculado por Salvadori[4] es:

$$T_1 = 0{,}8314 \text{ seg}$$

Se ve que, en este caso, la fórmula propuesta da igual error en valor absoluto que el método de Rayleigh, con mucho menos trabajo

7.- DISCUSION

La fórmula propuesta $T_1 = 4\sqrt{\frac{2\delta}{g}}$ permite calcular el período fundamental de edificios con rigidez de corte con un margen de error menor del 10% en todos los casos de la práctica y con menos cálculos numéricos que otras fórmulas o métodos conocidos.

En el caso de masas y rigideces iguales, mediante una ligera modificación de la fórmula de Salvadori hemos conseguido una precisión excelente para este tipo de edificios.

La fórmula modificada es la siguiente:

$$T_1 = (4N + 2)\sqrt{\frac{\Sigma M_i}{\Sigma K_i}} \qquad (18)$$

y se comprueba con una simple inspección de la Tabla I

OBSERVACION

Considerando la excelente aproximación obtenida con la fórmula propuesta para determinar el período de edificios con rigidez de corte, hemos pensado en la posibilidad de obtener otra fórmula análoga para edificios con deformación sólo de flexión.

Procediendo en la misma forma que se indica en este trabajo se ha llegado a la fórmula que sigue:

$$T_1 = 3{,}57\sqrt{\frac{2\delta}{g}} \qquad (19)$$

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece al Profesor Arturo Arias S., Director del Instituto de Investigaciones y Ensayes de Materiales de la Universidad de Chile, por sus consejos en relación a la justificación de la fórmula propuesta y por su colaboración en la revisión del texto final del manuscrito. Agradece asimismo la coboración del Sr. Abraham Husid, Director del Centro de Computación de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la U. de Chile, por la programación y obtención de modos y valores propios de las estructuras analizadas de más de cinco pisos.

BIBLIOGRAFIA

1.- *Ley y Ordenanza General sobre Construcciones y Urbanización.* Instituto Nacional de Investigaciones Tecnológicas y Normalización. Santiago 1949.

2.- Merit P. White. *Proceedings American Society of Civil Engineers.* vol. 64 nº 10, Diciembre 1938. Discussion, pp. 2055-2060.

3.- Joseph L. Lagrange. *Mecanique Analytique.* 1788, Tomo I, pp. 390.

4.- M.G. Salvadori, *Earthquake Stresses in Shear buildings.* Transactions American Society of Civil Engineers, vol 119, 1954, pp. 183-4.

5.- A. Arias y R. Husid. *Proyecto de norma de cálculo antisísmico de edificios* Revista del IDIEM, vol 1, nº 2, junio 1962. Santiago Chile. pp 121-146.

TABLAS DE DATOS Y RESULTADOS

Nomeclatura:

T: período fundamental del edificio
k_n: rigidez del piso n.
m_n: masa del piso n.

TABLA I

PERIODOS DE EDIFICIOS CON RIGIDEZ DE CORTE DE 2 A 24 PISOS CON DISTRIBUCIONES UNIFORMES DE MASAS Y RIGIDECES

Nº de la Estructura	Nº de pisos	Valores de $T\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$			
		Fórmula			Valor exacto
		White	Salvadori	Propuesta	
1	2	10,17	8	9,80	10,17
2	3	14,12	12	13,87	14,12
3	4	18,09	16	17,90	18,09
4	5	22,07	20	21,91	22,08
5	6	26,06	24	25,92	26,06
6	7	30,05	28	29,93	30,05
7	8	34,05	32	33,94	34,05
8	9	38,04	36	37,95	38,04
9	10	42,04	40	41,95	42,04
10	12	50,03	48	49,96	50,03
11	14	58,03	56	57,97	58,03
12	16	66,03	64	65,97	66,02
13	18	74,02	72	73,97	74,02
14	20	82,02	80	81.98	82,02
15	22	90,02	88	89,98	90,02
16	24	98,02	96	97,98	98,02

TABLA II

PERIODOS DE EDIFICIOS DE 2 PISOS CON RIGIDEZ DE CORTE

Nº de la Estruc.	$k_2 : k_1$	$m_2 : m_1$	Valores de $T\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$			
			Fórmula			Valor exacto
			White	Salvadori	Propuesta	
17	1 : 2	1 : 1	11,74	9,24	11,31	11,61
18	1 : 3	1 : 1	12,46	9,80	12,63	13,03
19	1 : 4	1 : 1	12,86	10,12	13,84	14,38
20	1 : 5	1 : 1	13,13	10,33	14,97	15,64
21	1 : 10	1 : 1	13,71	10,79	19,60	20,93
22	1 : 100	1 : 1	14,31	11,26	57,13	63,15
23	2 : 1	1 : 1	8,30	6,53	8,94	9,49
24	10 : 1	1 : 1	4,33	3,41	8,20	9,00
25	100 : 1	1 : 1	1,43	1,13	8,02	8,89
26	2 : 1	1 : 2	7,19	5,66	7,48	7,90
27	3 : 1	2 : 1	8,81	6,93	10,83	11,70

TABLA III

PERIODOS DE EDIFICIOS DE 3 PISOS CON RIGIDEZ DE CORTE

Nº de la Estruc.	$k_1:k_2:k_3$	$m_1:m_2:m_3$	Valores de $T\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$			
			Fórmula			Valor exacto
			White	Salvadori	Propuesta	
28	3:2:1	1:1:1	17,32	14,80	16,95	16,87
29	5:3:1	1:1:1	18,23	15,40	19,02	18,89
30	8:5:2	1:1:1	17,89	15,20	18,05	17,90
31	4:3:2	1:1:1	16,43	13,96	15,64	15,69
32	3:3:1	1:1:1	16,00	13,60	16,00	15,80
33	1:3:1	1:1:1	10,05	9,23	12,20	12,44
34	5:3:1	5:3:1	14,14	12,00	11,50	10,69
35	1:3:1	1:2:1	12,63	10,73	13,84	14,22
36	1:1:1	10:7:4	11,82	10,02	10,73	10,76
37	1:1:1	1:1:2	16,30	13,83	16,97	17,64
38	100:1:1	1:1:1	24,23	20,58	98,47	102,03
39	10:1:1	1:1:1	22,33	18,97	32,50	33,33
40	5:1:1	1:1:1	20,68	17,57	24,00	24,45
41	2:1:1	1:1:1	17,30	14,70	16,97	17,16
42	1:100:100	1:1:1	1,73	1,47	9,85	10,91
43	1:10:10	1:1:1	5,34	4,54	10,28	11,19
44	1:2:2	1:1:1	10,94	9,30	12,00	12,48

TABLA IV

PERIODOS DE EDIFICIOS DE 4 PISOS CON RIGIDEZ DE CORTE

Nº de la Estruc.	$k_1:k_2:k_3:k_4$	$m_1:m_2:m_3:m_4$	Valores de $T\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$			
			Fórmula			Valor exacto
			White	Salvadori	Propuesta	
45	15:11:7:3	1:1:1:1	23,35	21,60	23,58	22,95
46	1: 4:4:4	1:1:1:1	10,05	8,90	13,27	13,98
47	3:11:7:3	1:1:1:1	12,74	11,25	14,61	14,75
48	1: 4:4:4	1:3:1:2	13,29	11,73	17,66	18,66
49	1: 1:1:10	1:1:1:4	13,29	11,73	24,28	25,93
50	1: 1: 1:10	1:4:1:1	13,29	11,73	21,98	22,80
51	1: 1:1:1	1:2:2:1	22,19	19,58	21,90	22,37
52	1: 4:4:4	1:2:2:2	13,29	11,73	17,89	18,97
53	1:10:10:10	1:1:1:1	6,50	5,75	12,13	13,12
54	1:100:100:100	1:1:1:1	2,09	1,84	11,40	12,62
55	100: 1:1:1	1:1:1:1	35,65	31,53	139,02	141,56

TABLA V

ESTRUCTURAS DE 10 PISOS

Nº de la Estruc.	Razones entre las rigideces										Distribuc. de masas
	k_1 :	k_2 :	k_3 :	k_4 :	k_5 :	k_6 :	k_7 :	k_8 :	k_9 :	k_{10}	
56	1 :	0,9 :	0,8 :	0,7 :	0,6 :	0,5 :	0,4 :	0,3 :	0,2 :	0,1	a
57	2 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1	a
58	2 :	1 :	0,9 :	0,8 :	0,7 :	0,6 :	0,5 :	0,4 :	0,3 :	0,2	a
59	5 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1	a
60	5 :	1 :	0,9 :	0,8 :	0,7 :	0,6 :	0,5 :	0,4 :	0,3 :	0,2	a
61	10 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1	a
62	10 :	1 :	0,9 :	0,8 :	0,7 :	0,6 :	0,5 :	0,4 :	0,3 :	0,2	a
63	1 :	9 :	8 :	7 :	6 :	5 :	4 :	3 :	2 :	1	a
64	1 :	1,9 :	1,8 :	1,7 :	1,6 :	1,5 :	1,4 :	1,3 :	1,2 :	1,1	a
65	1 :	9,5 :	9,0 :	8,5 :	8,0 :	7,5 :	7,0 :	6,5 :	6,0 :	5,5	a
66	1 :	4,5 :	4,0 :	3,5 :	3,0 :	2,5 :	2,0 :	1,5 :	1,0 :	0,5	a
67	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1	b
68	1 :	0,95:	0,90 :	0,85	0,80:	0,75:	0,70:	0,65:	0,60:	0,55	b
69	1 :	0,9 :	0,8 :	0,7 :	0,6 :	0,5 :	0,4 :	0,3 :	0,2 :	0,1	b
70	1 :	9 :	8 :	7 :	6 :	5 :	4 :	3 :	2 :	1	b
71	1 :	9,5 :	9,0 :	8,5:	8,0 :	7,5 :	7,0 :	6,5 :	6,0 :	5,5	b
72	1 :	4,5 :	4,0 :	3,5:	3,0 :	2,5 :	2,0 :	1,5 :	1,0 :	0,5	b
73	1 :	1,9 :	1,8 :	1,7:	1,6 :	1,5 :	1,4 :	1,3 :	1,2 :	1,1	b
74	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1 :	1	c
75	1 :	0,95:	0,90:	0,85:	0,80:	0,75 :	0,70:	0,65:	0,60:	0,55	c
76	1 :	0,9 :	0,8 :	0,7:	0,6 :	0,5 :	0,4 :	0,3 :	0,2 :	0,1	c
77	1 :	9 :	8 :	7 :	6 :	5 :	4 :	3 :	2 :	1	c
78	1 :	9,5 :	9,0 :	8,5:	8,0 :	7,5 :	7,0 :	6,5 :	6,0 :	5,5	c

TABLA V (continuación)

Nº de la Estruc.	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	Distribuc. de masas
79	1	4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5	c
80	1	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	c
81	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	d
82	2	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	d
83	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	d
84	5	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	d
85	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	d
86	10	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	d
87	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	e
88	2	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	e
89	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	e
90	5	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	e
91	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	e
92	10	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	e
93	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,8	f
94	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,6	g
95	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,4	h
96	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,2	h
97	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,1	h

TABLA VI

DISTRIBUCIONES DE MASAS. EDIFICIOS DE 10 PISOS

Tipo de distribuc	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}
a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
b	1	0,975	0,950	0,925	0,900	0,875	0,850	0,825	0,800	0,775
c	1	0, 95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55
d	2	1	0,975	0,950	0,925	0,900	0,875	0,850	0,825	0,800
e	2	1	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60
f	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,8
g	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,6
h	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,4

TABLA VII

PERIODOS DE EDIFICIOS DE 10 PISOS CON RIGIDECES DE CORTE*

Nº de la Estructura	Valores de $T\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ Fórmula			Valor exacto
	White	Salvadori	Propuesta	
56	56,69	53,93	56,57	53,52
57	56,42	53,88	56,57	56,65
58	68,83	65,73	69,61	67,24
59	79,18	75,61	86,72	86,90
60	91,84	87,70	107,86	104,03
61	96,10	91,77	121,33	121,80
62	106,71	101,90	151,48	146,12
63	19,60	18,65	24,66	24,46
64	34,91	33,22	34,93	34,70
65	16,06	15,28	22,36	23,22
66	27,42	26,09	29,93	28,84
67	39,60	37,68	38,68	38,55
68	44,99	42,80	42,32	41,65
69	53,40	50,81	51,57	48,48
70	18,46	17,57	22,84	22,64
71	15,13	14,40	20,85	21,63
72	25,81	24,58	27,55	26,46
73	32,89	31,29	32,21	31,70
74	37,01	35,21	35,10	34,75
75	42,04	40,00	38,24	37,36
76	49,90	47,48	46,04	42,95
77	17,25	16,42	20,86	20,70
78	14,14	13,45	19,22	19,92
79	24,14	22,97	24,95	23,89
80	30,73	29,24	29,24	28,74
81	40,15	38,33	37,54	37,18
82	48,93	46,72	45,77	43,67
83	56,20	53,70	57,29	57,12
84	65,25	62,34	70,60	67,71
85	68,28	65,22	80,00	79,73
86	75,80	72,45	99,14	95,04
87	38,24	36,58	35,61	34,20
88	46,62	44,55	41,76	39,18
89	53,50	51,19	52,74	52,13
90	62,21	59,48	64,48	61,30
91	65,20	62,23	73,67	72,90
92	72,36	69,15	90,38	86,08
93	41,85	40,00	41,26	41,26
94	41,85	40,00	40,56	40,54
95	41,85	40,00	39,84	39,66
96	42,33	40,45	40,24	39,74
97	42,52	40,63	41,03	39,82

*Las razones entre rigideces y distribuciones de masas de las estructuras aparecen en las Tablas V y VI.

COMPUTATION OF THE NATURAL PERIOD OF SHEAR BUILDINGS

SUMMARY:

Several methods for the computation of the fundamental period of shear buildings are examined.

A simple formula that gives results sufficiently approximate for practical applications with a minimum of computation is given.