

DISTRIBUCIONES DE LA RESPUESTA MAXIMA A UNA EXCITACION ALEATORIA

A. Gerald BRADY*

Raúl HUSID**

RESUMEN

La confianza que se puede otorgar a los espectros de respuesta media depende de la dispersión de los valores de los espectros individuales en torno a esta media. La distribución de la respuesta de velocidad relativa máxima se ha investigado experimentalmente por técnicas de Monte-carlo usando un modelo analógico eléctrico de una excitación de ruido blanco de duración constante. Los resultados tabulados de la media y de la desviación estándar para varios valores de amortiguamiento y período y los histogramas presentados, indican en qué forma las distribuciones dependen de estos dos parámetros estructurales.

Para confirmar las distribuciones se han seguido métodos analíticos usando igualmente excitación de ruido blanco; una ampliación de los resultados de Rosenblueth y Bustamante permite encontrar expresiones analíticas para las distribuciones de una variable que difiere poco de la velocidad relativa. Por medio de cálculos con computadores electrónicos digitales se confirma que las técnicas numéricas aproximadas de Rosenblueth dan valores bien ajustados de la probabilidad de sobrevivencia. Se han hecho otros cálculos para obtener una familia de distribuciones de la respuesta máxima aproximada normalizada, con respecto a la respuesta máxima amortiguada. Cada miembro de la familia con su desviación media y estándar depende del parámetro $n s/T$. Como ayuda para los estudios

* Profesor en Ingeniería Civil, Universidad de Auckland, Nueva Zelandia.

**Ingeniero investigador de IDIEM, Universidad de Chile, Profesor de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile, con permiso en el Instituto Tecnológico de California, Pasadena, California.

de Montecarlo ha resultado inapreciable la computación híbrida usando o computadores analógicos o digitales, cada uno donde era más apropiado.

INTRODUCCION

Un terremoto y su efecto en una estructura simple de un grado de libertad puede caracterizarse por medio del espectro de respuesta de la velocidad relativa máxima, llamado comúnmente espectro de respuesta^{1, 2}, que expresa la velocidad relativa máxima alcanzada por la masa en una estructura lineal con amortiguamiento viscoso, durante la excitación de la base. La ecuación de movimiento para tal estructura puede escribirse:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = -m\ddot{y}(t) \quad (2.1)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\ddot{x} + 2n\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = -\ddot{y}(t) \quad (2.2)$$

en que m es la masa, c el coeficiente de amortiguación viscosa, k la rigidez, x es el desplazamiento relativo, $\ddot{y}(t)$ es la aceleración absoluta del suelo, $n = c/2\sqrt{km}$ es la fracción de amortiguación crítica y $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural. La ecuación (2.2) indica que el valor máximo de x depende de 2 parámetros n y ω_0 . En el campo de la ingeniería antisísmica, los dos parámetros que se usan son el período natural, $T = 2\pi/\omega_0$ y n . Existen las curvas de los espectros de respuesta en términos de n y T para todos los terremotos fuertes registrados en Estados Unidos³. Casi todos tienen una forma similar. La curva no amortiguada tiene una parte rápidamente oscilante en los períodos bajos (hasta un segundo) y tiende a variar en torno a un nivel razonablemente constante para períodos altos; a medida que aumenta el amortiguamiento, las curvas se suavizan e indican máximos progresivamente menores. Aunque puede esperarse que los espectros de los terremotos fuertes futuros sean similares a éstos, las partes oscilatorias señalan que hay alguna duda sobre cuán próxima será la similitud. Los ocho componentes de los cuatro terremotos más fuertes registrados hasta 1959 han sido usados por G.W. Housner para calcular un espectro medio, con el cual se puede estimar la respuesta máxima esperada a futuros terremotos⁴. Sin embargo, no se puede llegar a conclusiones con relación a la dispersión de tales respuestas máximas futuras respecto a su valor medio a partir de una muestra tan pequeña. Uno de los problemas respondidos

en este trabajo se deriva directamente de esto. ¿Cómo obtener suficiente información sobre respuestas máximas de modo que se pueda deducir la distribución en torno a la media?.

Estas distribuciones son de interés creciente en la actualidad para aquellos ingenieros proyectistas que pueden sacar ventaja de un conocimiento previo de la probabilidad de sobrevivencia o de falla de una estructura. Los tipos de problemas que se plantean son los siguientes: Supóngase que se haya especificado un terremoto estándar como el más desfavorable para una localidad particular y que se pueda obtener un ensemble de tales terremotos con propiedades estadísticas idénticas. ¿En qué forma afectan los parámetros estructurales de masa, amortiguamiento y rigidez al valor medio de la tensión máxima experimentada en algún punto crítico por una estructura simple? ¿Cuál es la probabilidad de que la tensión máxima sea un cierto múltiplo de la que corresponde a la media de los máximos del ensemble y cómo afectan a estas probabilidades la masa, el amortiguamiento y la rigidez?

Para responder a estas preguntas el problema será formulado en la forma más simple posible. Considérese un oscilador simple, lineal, amortiguado viscosamente, de un grado de libertad, cuya base se pueda excitar al azar. La naturaleza particular de la excitación no está todavía especificada, aunque será tal que la aceleración de la base será en definitiva una cualquiera de las siguientes: ruido blanco, como el usado por primera vez por Housner⁵ y posteriormente por otros autores^{1,6,7,8,9}; un proceso gaussiano no blanco con una densidad de potencia especificada, como el usado por Housner y Jennings⁹; y registros reales de terremotos fuertes³. Una vez que se elija el tipo de excitación junto con su duración y alguna medida de su fuerza o intensidad, se puede hacer un estudio significativo de las propiedades estadísticas de la respuesta de la estructura. Estas tres excitaciones ofrecen dificultades progresivamente crecientes para obtener respuestas analíticas al problema de la distribución, y en realidad la tercera es incluso difícil de describir satisfactoriamente en forma matemática, debido a su naturaleza no estacionaria.

En vista de esto, se investigaron las técnicas Montecarlo para una solución experimental que tuviera un amplio campo de aplicación, ya que estaban en juego diferentes tipos de excitación. La técnica podía ser usada estableciendo una excitación repetitiva, o sea una cuyas propiedades estadísticas pudieran repetirse a voluntad, aplicada a la base de la estructura suficientes veces como para determinar experimentalmente las curvas de distribución de la respuesta máxima. Había que hacer elecciones apropiadas de amortiguamiento y períodos de la estructura para obtener un espectro completo de curvas de distribución útiles. Los experimentos matemáticos repetidos pueden ser fácilmente desarrollados por las técnicas del computador analógico eléc-

trico. Los resultados pueden compararse con un análisis que sigue el método de Rosenblueth y Bustamante⁸ para obtener las densidades de probabilidad de respuesta máxima y su dependencia del amortiguamiento, período y duración de la excitación, para excitaciones simples.

TECNICAS DE MONTECARLO

Se usó el computador analógico eléctrico del Dynamics Laboratory para proveer resultados experimentales apropiados para comparación posterior, usando el siguiente método (Fig. 1).

ECUACION DE MOVIMIENTO $x + a_1 \dot{x} + a_2 x = a_3 E_0(t)$

ECUACION PARA EL MODELO $\dot{x} = \int_0^t [a_3 E_0(t) - a_1 \dot{x} - a_2 x] dt$

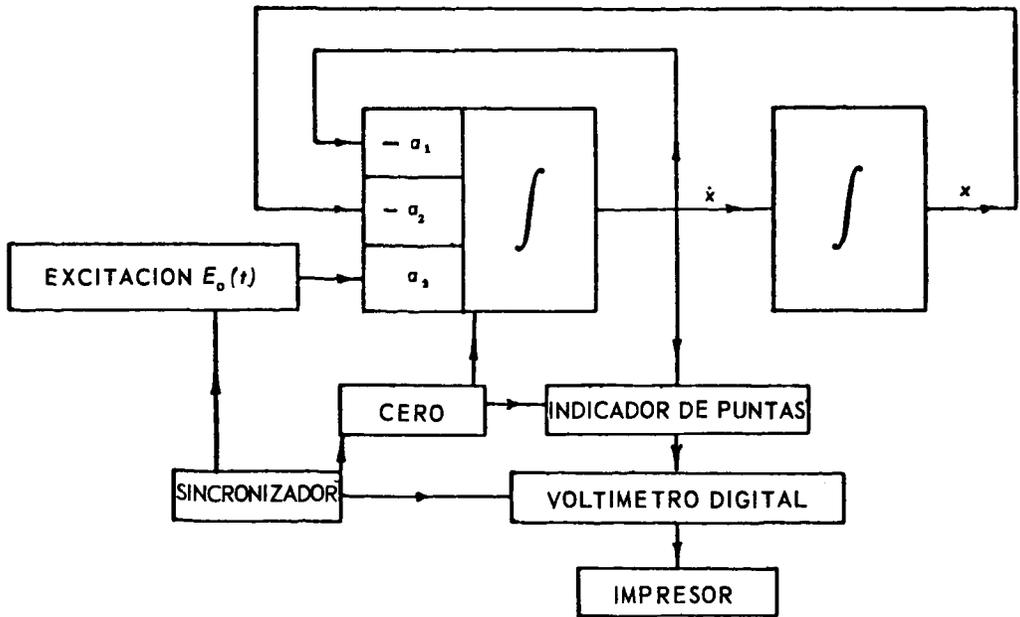


Fig. 1. Diagrama de bloque del modelo eléctrico para la velocidad relativa máxima del oscilador.

Se disponía de un generador de ruido de baja frecuencia, cuya señal podía hacerse pasar a través de filtros para proveer excitación al azar con cualquier densidad espectral de potencia especificada. Esta flexibilidad es una de las ventajas del computador analógico de este estudio. La densidad de potencia espectral de un registro de terremoto está relacionada aproximadamente con el cuadrado del espectro de respuesta no amortiguado, y surgió la posibilidad de usar una curva de densidad espectral media, en el mismo sentido que Housner y Jennings⁹, deducida de la curva de espectro de respuesta media descri-

ta en la Introducción. Sin embargo, debido a que la oportunidad de comprobar los resultados experimentales frente a los teóricos existían sólo si se hacían suficientes simplificaciones, se usó la excitación del tipo de ruido blanco con densidad espectral constante hasta 100 cps.

Para obtener diferentes valores de amortiguamiento y período se ajustaban los elementos que controlan a esos coeficientes. En cada operación se aplicaba el voltaje correspondiente a la velocidad relativa x en una dirección, por medio de un circuito de diodo simple, a una placa de un condensador. Por observación visual frecuente de este voltaje se comprobaba que la amplitud estaba variando con suficiente lentitud en torno al máximo y que la observación bastaba hacerla en un solo sentido. El condensador retenía el valor máximo del voltaje que se le aplicaba durante la excitación. El valor final se leía descargando el condensador a través de un dispositivo integrador y aplicando la salida a un voltímetro digital. Este estaba conectado a un impresor digital para el registro permanente. Se usó siempre la duración de 30 segundos con un dispositivo automático de sincronización para echar a andar y detener la excitación, medir y registrar el máximo, llevar a cero el sistema y el registro de puntas, y repetir la operación. Se tomaron 1.000 muestras para cada uno de cuatro períodos diferentes (0,2; 1,0; 1,5 y 2,0 segundos) y cuatro fracciones de amortiguamiento (0, 2, 5 y 10%). Para calcular la media y la desviación para los 16 casos, se usó el computador digital IBM 7094 del Instituto de Tecnología de California y se trazaron en cada caso los histogramas de los máximos. La excitación y la salida fueron proporcionadas adecuadamente para obtener las lecturas a la escala en que se presentan aquí. En análisis posteriores la respuesta se expresó en forma no dimensional dividiendo por la media no amortiguada, así que en este trabajo no se pretende registrar las unidades de velocidad.

Los 16 histogramas aparecen en las Figuras 2 a 5 junto con las distribuciones teóricas correspondientes a $T = 0,5; 1,0; 1,5; 2,0$ segundos y $n = 0,2, 5$ y 10%. En cada histograma se muestran la media experimental μ , y la desviación estándar σ . Se nota que la media y la desviación estándar aumentan ambas con el período para un determinado amortiguamiento. Este comportamiento de la media puede esperarse de la forma de los espectros de respuesta de terremoto existentes. Para cada grupo de 1.000 muestras se calcularon la media y la desviación estándar para 50, 100, 150,... 1.000 muestras, con el objeto de obtener información sobre la dependencia de μ y σ con respecto al número de muestras. En general las medias se estabilizaron después de 300 a 500 muestras y las desviaciones estándares después de 500 a 600 muestras. Como ilustración tenemos en la Fig. 6 μ y σ en función del número de muestras para el valor de $T = 1,0$ segundo y los cuatro valores de n considerados.

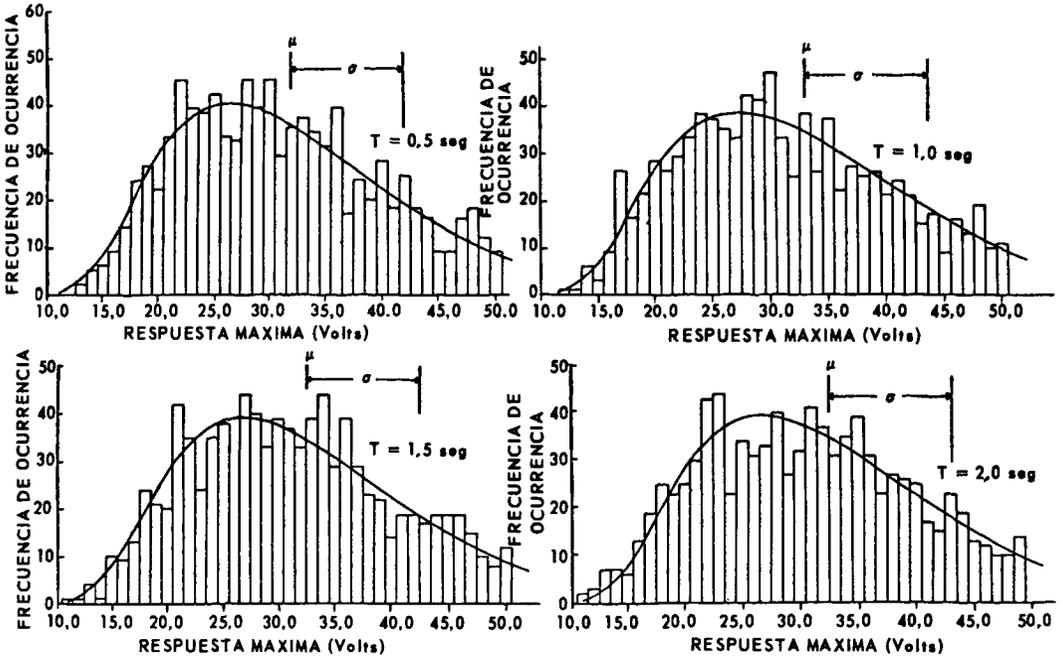


Fig. 2. Distribuciones de la respuesta máxima, teórica y experimental, n = 0,00

ECUACIONES ANALITICAS DE LA DISTRIBUCION

En este capítulo se deducen las expresiones de la densidad de probabilidad siguiendo el trabajo de Rosenblueth y Bustamante⁸ sobre probabilidad de sobrevivencia y extendiendo sus resultados para obtener curvas con las cuales comparar las del capítulo anterior. La parte principal del próximo capítulo está constituida por cálculos exactos de las expresiones hechas con el computador IBM 7094, y una indicación del uso al que pueden destinarse.

Para dejar en claro los fundamentos del análisis se describirán en primer lugar los resultados de Rosenblueth y Bustamante.

Se supone que la aceleración del suelo consiste en una serie de impulsos distribuidos al azar tanto en magnitud como en tiempo, tales que la velocidad del suelo cambia instantáneamente en una cantidad u_i en el instante t_i . La aceleración $\ddot{y}(t)$ está dada entonces por:

$$\ddot{y}(t) = \sum_{i=1}^i u_i \delta(t - t_i) \quad 0 < t < s \tag{2.3}$$

$$\ddot{y}(t) = 0, \text{ en los demás intervalos}$$

en que la sumatoria se extiende sólo hasta el impulso que precede inmediata-

mente al intervalo t o sea $t_j < t < t_{j+1}$; $\delta(t)$ es la función delta de Dirac y s la duración de la excitación.

Caso no amortiguado

La ecuación (2.2) con $n = 0$ da la respuesta de un oscilador lineal no amortiguado. Para condiciones iniciales nulas, las expresiones según la integral de Duhamel de x y \dot{x} pueden sustituirse en la relación que sigue por una expresión r :

$$r^2 = (\omega_0 x)^2 + \dot{x}^2 \quad (2.4)$$

dando

$$r^2 = \left[\sum_{i=1}^j u_i \operatorname{sen} \omega_0 t_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^j u_i \cos \omega_0 t_i \right]^2 \quad (2.5)$$

La expresión r es de primordial interés en este análisis porque da buena aproximación de los valores absolutos máximos locales tanto de $\omega_0 x$ como de \dot{x} en función del tiempo. Esto se puede verificar fácilmente ya que $\dot{x} = 0$ para

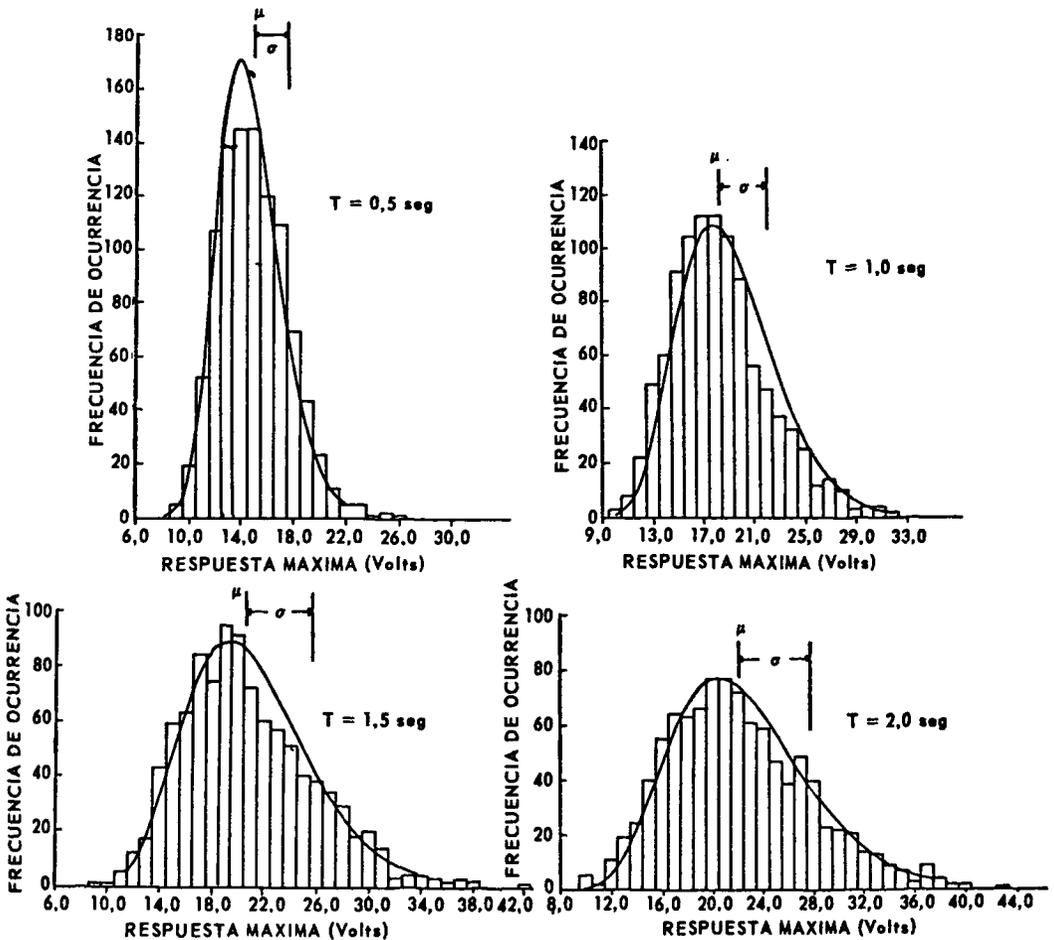


Fig. 3. Distribuciones de la respuesta máxima, teórica y experimental. $n = 0,02$

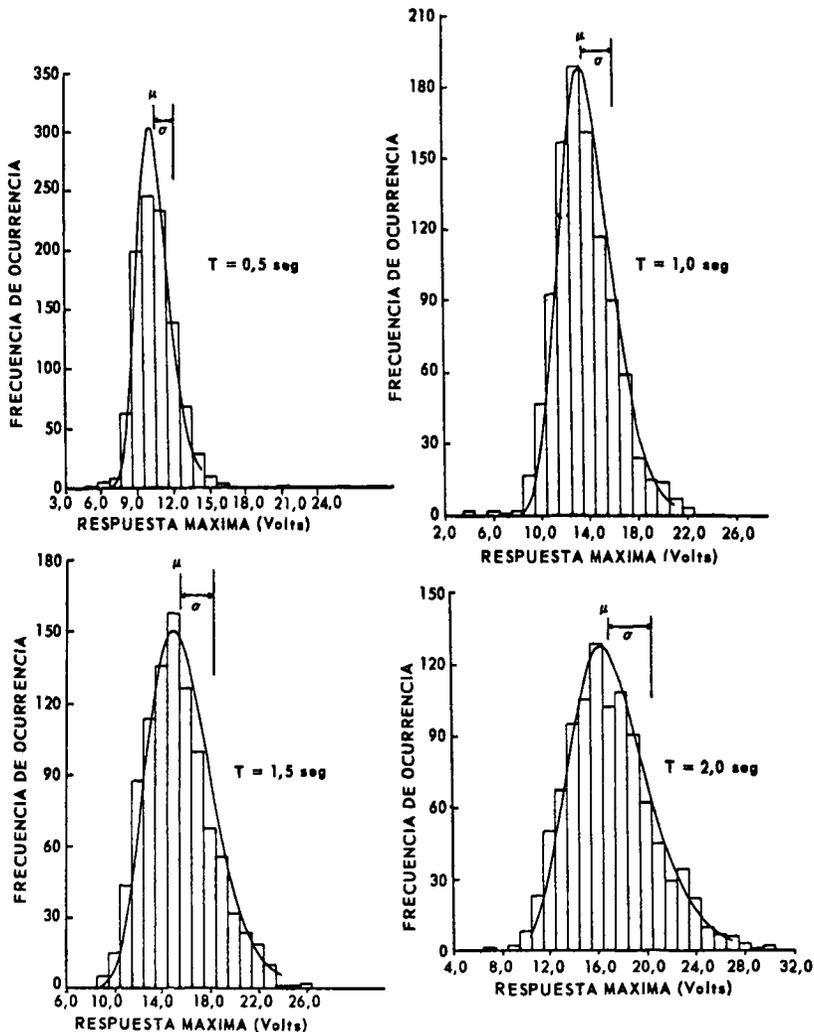


Fig. 4. Distribuciones de la respuesta máxima, teórica y experimental.
 $n = 0,05$

x máximo y x está cerca de un máximo local cuando el oscilador pasa por $x = 0$. Estas deducciones pueden confirmarse observando un registro de la respuesta a una excitación de ese tipo. Tal registro indicará también que cuando el excitador parte desde el reposo, se necesita un intervalo de tiempo razonable, que depende de la frecuencia natural ω_0 , antes que el movimiento oscilatorio de amplitud lentamente variable se establezca. Si la duración de la excitación es mucho mayor que el período natural T y el máximo valor de r ocurre en un instante apreciablemente posterior al comienzo de la excitación, entonces r es una suficiente aproximación del valor máximo local tanto de $|\omega_0 x|$ como de $|\dot{x}|$.

Aunque las dos componentes de r indicadas en (2.5) no son variables aleatorias estrictamente independientes, deben ser tratadas, para los efectos de este análisis, como los componentes de un camino aleatorio bidimensional. Más adelante se discute la justificación de este análisis. En este caso, r es la distancia desde el origen al punto móvil del plano. La parte siguiente del

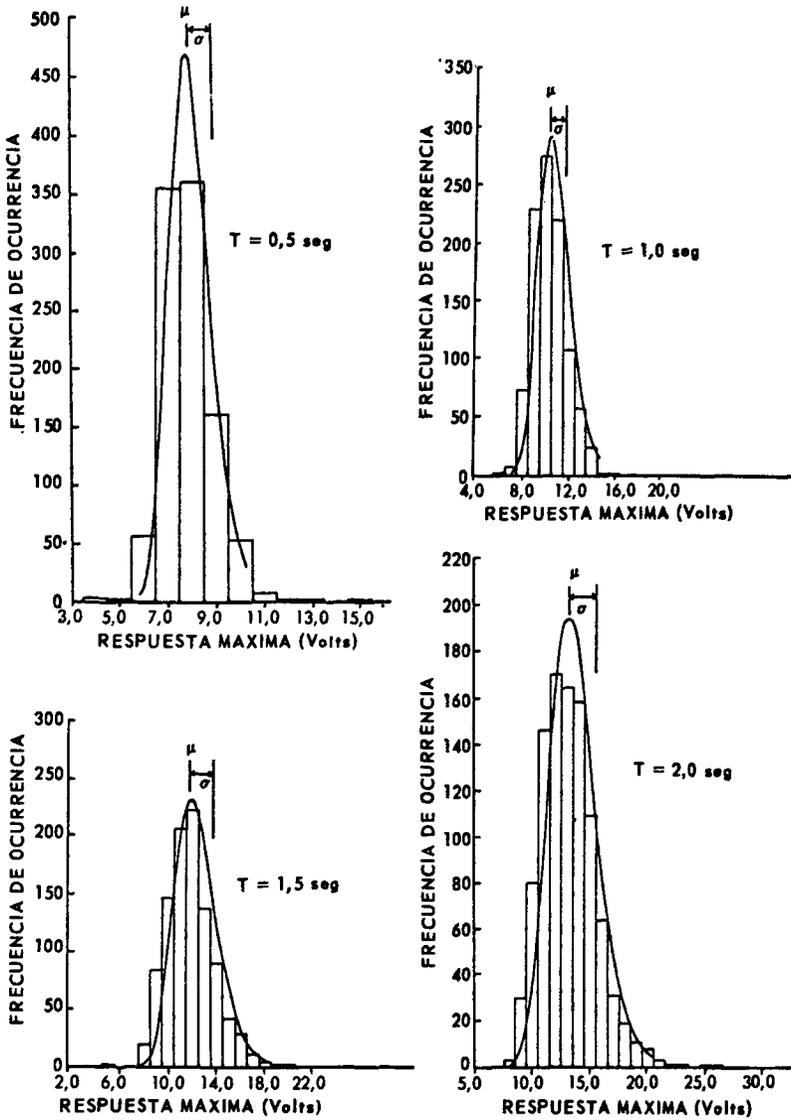


Fig. 5. Distribuciones de la respuesta máxima, teórica y experimental. $n = 0,10$.

análisis es el paso al límite de tramos de longitud infinitesimal. En la analogía del camino aleatorio, Feller²⁰ ha demostrado que si la longitud de los tramos y de los incrementos de tiempos se mantienen respectivamente iguales, entonces deben cumplirse ciertas condiciones que los relacionan, al pasar al límite, para que la velocidad de recorrido se mantenga finita y no haya una derivada predominante en el movimiento. Para longitudes de tramos e incrementos de tiempo variables al azar, las condiciones para el movimiento original del suelo pueden escribirse como sigue:⁸

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{E \sum_{t=t_1}^{t_2} u_i^2}{t_2 \cdot t_1} = 2k_1, \text{ una constante} \quad (2.6)$$

$$E(u_i) = 0 \quad (2.7)$$

Se ha demostrado⁹ que esta intensidad, k_1 , está relacionada con la densidad espectral de potencia, $G(\omega)$, del proceso estocástico del cual (2.3) puede considerarse un miembro.

$$2k_1 = \lambda \sigma^2 = \pi G(\omega) \quad (2.8)$$

en que λ es el número medio de impulsos por segundo y σ^2 es su varianza. Si se cumplen estas condiciones (2.6) y (2.7) es lícito pasar al límite y el camino aleatorio se transforma en un sistema regido por la ecuación de difusión¹⁰

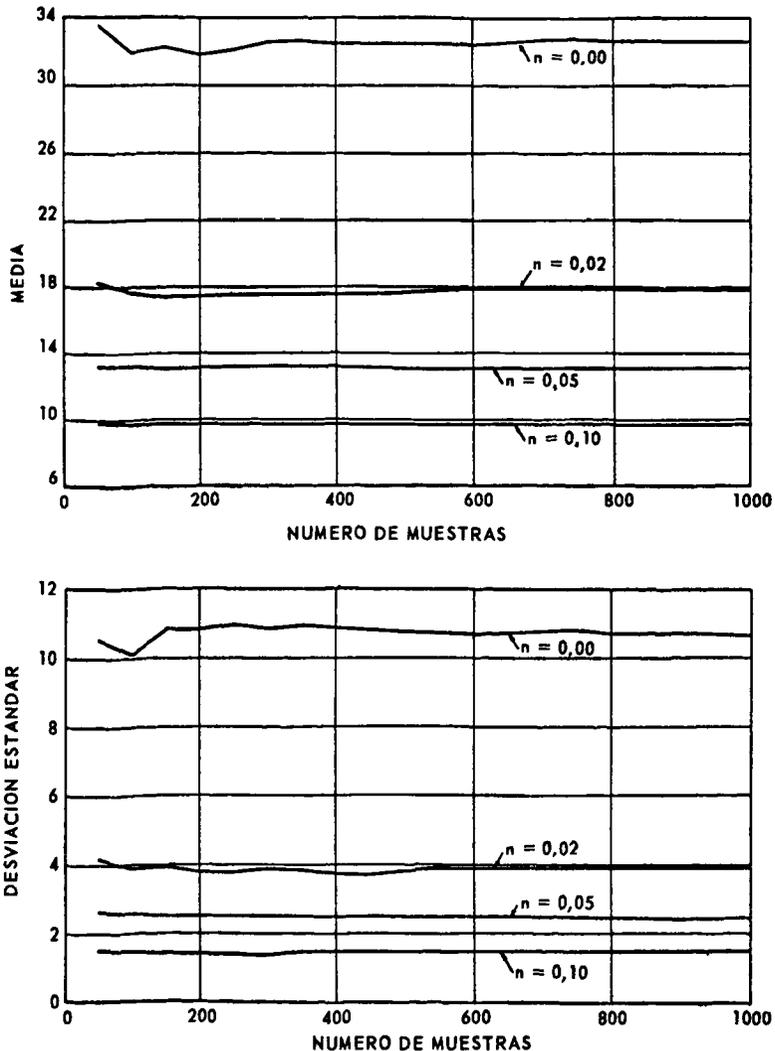


Fig. 6. Media y desviación estándar para diferente número de muestras.
T = 1,0 seg.

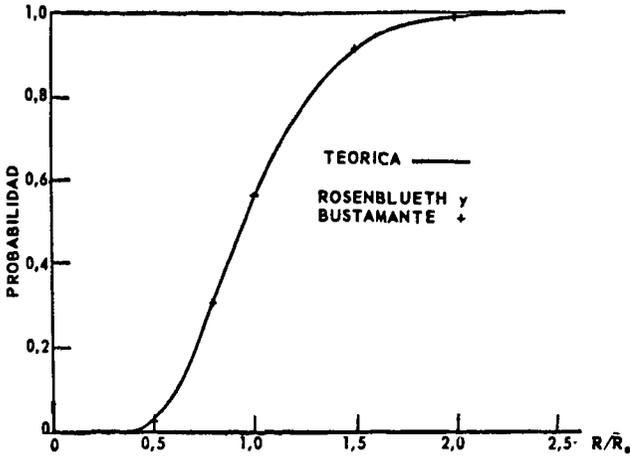


Fig. 7a. Distribución de probabilidad de respuesta máxima no amortiguada.

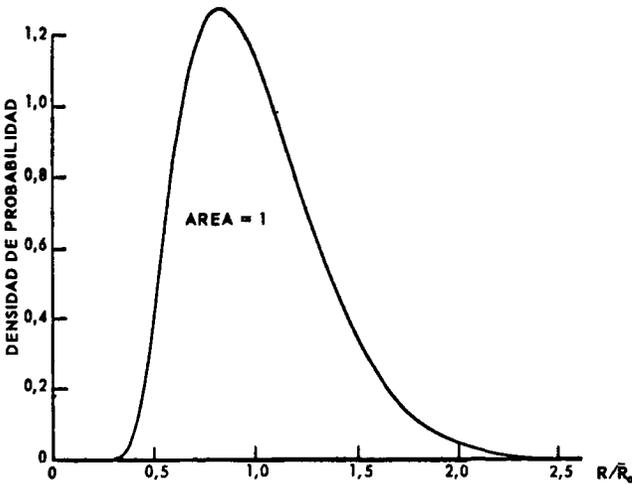


Fig. 7b. Densidad de probabilidad de respuesta máxima no amortiguada.

$$k_1 \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{2.9}$$

en que k_1 es la constante definida en (2.6) y la probabilidad de que r esté comprendido entre r y $r + dr$ en el instante t es $2\pi u(r,t)rdr$, tomando en cuenta la simetría radial en el planteamiento del problema. Hay dos condiciones en $u(r,t)$ que permiten resolver la ecuación (2.9).

Primero, para todo $t \neq 0$ la probabilidad de que r exceda un radio elegido R es cero, luego

$$u(r,t) = 0, \quad t > 0 \tag{2.10}$$

Esto asegura que $u(r,t)$ tendrá la forma correcta al sustituirlo en la expresión de la probabilidad $F(R,t)$ de que R no haya sido excedido en ningún instante durante el tiempo t :

$$F(R, t) = 2\pi \int_0^R u(r, t) r dr \quad (2.11)$$

Segundo, para $t = 0$, es evidente que $r = 0$. La ecuación (2.11) conduce a elegir $u(r, 0)$ de la forma

$$u(r, 0) = \frac{\delta(r)}{\pi r} \quad (2.12)$$

entonces

$$F(R, 0) = 2\pi \int_0^R \frac{\delta(r)}{\pi r} r dr = 1 \quad (2.13)$$

se cumple para todo R , inclusive el valor cero.

La condición de borde, (2.10) da la posibilidad de resolver el problema del "primer paso", pues con la condición inicial, (2.12) es posible resolver (2.9) y sustituir en (2.11) obteniendo la probabilidad $F(R)$ de que R no haya sido excedido en ningún instante durante los s segundos de excitación

$$F(R) = F(R, s) = 2\pi \int_0^R u(r, s) r dr \quad (2.14)$$

Esta es la función de distribución¹¹ para el valor máximo de $|\dot{x}|$ durante una excitación descrita por (2.3), (2.6) y (2.7). La función de densidad de probabilidad $f(R)$ está dada por

$$f(R) = \frac{\partial F}{\partial R} \quad (2.15)$$

Sólo se consideran valores positivos, de modo que tanto $F(R)$ como $f(R)$ son cero para $-\infty < R < 0$

Las soluciones para $F(R)$ del caso no amortiguado son¹⁵

$$F(R) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-k_1 s \lambda_m^2 / R^2}}{\lambda_m J_1(\lambda_m)} \quad (2.16)$$

$f(R)$ puede obtenerse de (2.15) y (2.16)

$$f(R) = \frac{4k_1 s}{R^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{J_1(\lambda_m)} e^{-k_1 s \lambda_m^2 / R^2} \quad (2.17)$$

en que λ_m son los ceros de J_0 , y J_0 y J_1 son funciones de Bessel de primera clase. En los cálculos siguientes es preferible transformar R en una expresión sin dimensiones dividiéndolo por su valor esperado o medio; dado por

$$E(R) = \int_0^{\infty} R f(R) dR \quad (2.18)$$

sustituyendo $f(R)$ de (2.17) da

$$E(R) = 4 k_1 s \int_0^{\infty} \frac{1}{R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{J_1(\lambda_m)} e^{-k_1 s \lambda_m^2 / R^2} dR \quad (2.19)$$

La serie de (2.19) no converge uniformemente en R pues para $R = \infty$ el criterio de D'Alembert indica que la serie diverge cuando $m \rightarrow \infty$. En consecuencia la serie no puede integrarse término a término. Rosenblueth y Bustamante⁸ llegan a la misma ecuación (como lo señala M.L. Juncosa¹²) en función de un parámetro $a = \frac{1}{2} R \sqrt{k_1 s}$. La ecuación (2.19) se transforma

$$E(R) = 2\sqrt{k_1 s} \left[\int_0^{\infty} \sum_m \frac{1}{a^2} \frac{\lambda_m}{J_1(\lambda_m)} e^{-\lambda_m^2 / 4a^2} \right] da \quad (2.20)$$

Una manera de integrar esta serie es hacer la integración hasta un número finito suficientemente grande, para el cual la serie todavía converge uniformemente, e intercambiar el orden para esta parte de la integral⁸. El límite superior de la integral se escoge de modo que el desarrollo asintótico para la suma de la serie dé una contribución despreciable para el resto de la integral. En esta forma (2.20) se reduce a

$$E(R) = 2,348 \sqrt{k_1 s} \quad (2.21)$$

Caso amortiguado

El análisis para el oscilador amortiguado se asemeja mucho en sus aspectos fundamentales al caso no amortiguado. Los resultados importantes son los mismos que obtuvieron Rosenblueth y Bustamante⁸, aunque los métodos usados corresponden a los del caso no amortiguado y están influenciados por la discusión de Caughey y Gray¹³. A continuación se presentan los puntos principales que conducen a la función de densidad de probabilidad para el oscilador amortiguado.

La formación del problema no permite usar el parámetro R definido en la ecuación (2.4). En su lugar el parámetro que se debe usar como un valor máximo local aproximado tanto de $|\omega x|$ como de \dot{x} está dado por

$$r^2 = (\omega x)^2 + (\dot{x} + n\omega_0 x)^2 \quad (2.22)$$

en que $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - n^2}$. El análisis se hace en términos de una expresión r_1 dada por

$$r_1 = e^{n\omega_0 t} r \quad (2.23)$$

en que n es la fracción del amortiguamiento crítico. La probabilidad de que $R_1 < r_1 < R_1 + dR_1$ en el instante t está dada por $v_1(R_1, t) 2\pi R_1 dR_1$ y está regida por la ecuación

$$K_1 e^{2n\omega_0 t} \nabla^2 u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad (2.24)$$

Esta probabilidad es igual que la probabilidad de que $R < r < R + dR$ en el instante t en que R_1 y R están relacionados por

$$R_1 = e^{n\omega_0 T} R \quad (2.25)$$

Un nuevo cambio de variable permite obtener las condiciones iniciales y condiciones de borde correspondientes a las ecuaciones (2.10) y (2.12); en esta forma es posible resolver la ecuación (2.24) como un problema de valores característicos.

La probabilidad $F(R)$ de que r no exceda a R durante los s segundos de la excitación está dada por

$$F(R) = e^{2n\omega_0 s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_0^1 z M_m(z) dz}{\int_0^1 z M_m^2(z) e^{c_3 z^2} dz} e^{-\nu_m s} \quad (2.26)$$

en que z es una variable accesoria de integración; $M_m(z)$ es una función de valores característicos para el problema, función hipergeométrica confluyente¹⁴ que depende del amortiguamiento n , de la frecuencia natural ω_0 , de la duración s , de la intensidad de excitación k_1 , del valor de la variable R y del valor característico ν_m , y c_3 es una constante dada por

$$c_3 = R^2 n \omega_0 / 2k_1 \quad (2.27)$$

En la referencia 15 se encontrará una descripción de los valores característicos ν_m y una relación de cómo la ecuación (2.26) para $F(R)$ del caso amortiguado se reduce a la ecuación (2.16) en el caso no amortiguado.

La función de densidad de probabilidades $f(R)$ se obtiene diferenciando la ecuación 2.26 parcialmente con respecto a R . Esto no es posible excepto con métodos numéricos. Las curvas se obtuvieron numéricamente para varios valores del período, amortiguamiento y duración como se describe más adelante en este trabajo.

Discusión de las ecuaciones de las funciones de densidad de probabilidad

El cálculo de Rosenblueth y Bustamante⁸ del valor esperado de la respuesta máxima no amortiguada según (2.20), aunque objetado por Juncosa¹², es correcto. Esto se desprende de los cálculos de $F(R)$ según (2.16), $f(R)$ según (2.17) y $E(R)$ según (2.18) hechos con computadora digital conforme se des-

cribe en el próximo capítulo. En los cálculos no se intentó mostrar la tendencia a un desarrollo asintótico de $F(R)$ para valores grandes de R . En vez de eso se intentó establecer si la ecuación (2.16) era apropiada para todos los valores de R que interesan, a saber hasta que $F(R)$ alcanza efectivamente la unidad. Se hizo lo mismo también para el caso amortiguado, en que $F(R)$ está dado por (2.26). En el próximo capítulo se muestra la efectividad de este procedimiento.

La contribución de Caughey y Gray¹³ sirve para justificar el planteamiento de Rosenblueth y Bustamante⁸ que forma la base de este trabajo. Las condiciones que deben satisfacerse para obtener las ecuaciones (2.9), (2.10) y (2.12) para el caso no amortiguado y la correspondiente (2.24) para el caso amortiguado son las siguientes:

- a) La excitación del suelo de ruido blanco definida en (2.3) obedece las especificaciones de (2.6) y (2.7).
- b) La expresión r definida por (2.5) para el caso no amortiguado y por (2.22) para el caso amortiguado es una buena aproximación del valor máximo local tanto de $|\omega_0 x|$ como de $|\dot{x}|$. Esto se cumple si el amortiguamiento es pequeño, la duración es mucho mayor que el período natural y el valor máximo de r se produce un tiempo apreciable después del comienzo de la excitación.

Estas suposiciones corresponden muy de cerca a las requeridas para que el planteamiento de Caughey y Gray sea comparable. Ellos consideran que la excitación en (2.2) es matemáticamente un ruido blanco, con densidad de potencia espectral constante para todos las frecuencias entre $+\infty$.

Dados el desplazamiento relativo y la velocidad en cierto instante, la probabilidad de que ellos se encuentren en el intervalo diferencial de otro par de valores en un instante posterior viene dada por la ecuación de Fokker-Planck, que da la densidad de probabilidad de transición correspondiente. Como el sistema comienza desde el reposo, esta probabilidad se reduce a la considerada en este capítulo. Sin embargo, el cambio a coordenadas polares requerido para introducir la condición de borde del problema del "primer paso" no reduce la ecuación de Fokker-Planck exactamente a las ecuaciones de difusión (2.9) y (2.24). La dificultad estriba en la dependencia angular de las soluciones. Tal dificultad se elimina al suponer que la duración es mucho mayor que el período natural. Se necesita un cambio de coordenadas diferente para ajustar exactamente el radio r del caso amortiguado, pero si la amortiguación se mantiene pequeña, a saber, muy inferior a la unidad, se vuelve a obtener la ecuación de difusión (2.24). Esta diferente formulación matemática del problema conduce a las mismas ecuaciones diferenciales que el planteamiento de Rosenblueth y Bustamante, bajo suposiciones similares.

EXTENSIONES CON COMPUTADOR DIGITAL DE LAS CURVAS EXISTENTES

La función de distribución $F(R)$, la densidad de probabilidad $f(R)$ y el valor esperado de R , $E(R)$, se dan para el caso no amortiguado por (2.16), (2.17) y (2.19). Hay tablas que dan los ceros de J_0 y los valores de J_1 para esos ceros. Los cálculos se hicieron en término del parámetro no dimensional

$$a = \frac{R}{2\sqrt{k_1 s}} \quad (2.28)$$

de forma que no se requieren valores específicos de R , k_1 o s . El procedimiento consistió en calcular cada término de las series de esas ecuaciones hasta que se alcanzara en las tres una exactitud preestablecida, incluyendo la aproximación de $F(R)$ a la unidad. Se encontró que el número de términos necesarios variaba desde dos, para valores pequeños de a , hasta doce para los valores más altos de a necesarios para la exactitud preestablecida. El cálculo de $E(R)$ según (2.19) dio el mismo resultado que según (2.21) hasta cuatro cifras significativas, como se esperaba. Esta confirmación indica que el valor obtenido por Juncosa¹² está equivocado, como lo suponían Rosenblueth y Bustamante. Se usó este valor de $E(R)$ para el caso no amortiguado en la representación de $F(R)$ y $f(R)$ así como de todos los resultados subsiguientes del caso amortiguado. La respuesta R se llevó a una expresión no dimensional describiéndola en términos de la fracción de la respuesta no amortiguada esperada R_0 . Las Figuras 7-a y 7-b muestran $F(R)$ y $f(R)$ en términos de R/R_0 , calculados hasta cuatro cifras significativas. En la Figura 7-a están colocados algunos puntos obtenidos del trazado por Rosenblueth y Bustamante de $Q = 1 - F(R)$; ellos concuerdan en forma muy aproximada.

La Figura 7-a puede considerarse como indicadora de la probabilidad de sobrevivencia de estructuras no amortiguadas durante una excitación de $k_1 s$ fijo. Si la respuesta máxima media se designa por R_0 , entonces la probabilidad de que la respuesta máxima no haya alcanzado un determinado múltiplo de aquél, se puede leer en la curva.

La Figura 7-b puede adaptarse fácilmente para comparar con los resultados experimentales mencionados en el capítulo sobre técnicas de Montecarlo. Las escalas del diagrama pueden ajustarse para hacer más fácil la comparación con un histograma; por ejemplo, mostrando la frecuencia de las respuestas máximas reales a una excitación estándar. Tal procedimiento se describe más adelante en este capítulo.

La función de distribución $F(R)$ se da para el caso amortiguado por (2.26). Puede mostrarse que el amortiguamiento n sólo aparece con la frecuencia natural en la forma $n\omega_0$ y por lo tanto con el período natural en la forma n/T .

Esto es de esperar de la forma de (2.24) donde aparece $n\omega_0$. Además, la duración s sólo aparece con el amortiguamiento y con la frecuencia natural en la forma ns/T . Cuando se introduce \bar{R}_0 como el valor esperado de la respuesta no amortiguada, dada por (2.21), $F(R)$ puede expresarse en función de R/R y ns/T solamente. Se hicieron una cantidad de ensayos preliminares para comprobar la exactitud del programa del computador y después para contrastar los resultados con dos de las curvas de Rosenblueth y Bustamante.

El cálculo de los valores característicos ν_m y de las funciones confluentes hipergeométricas $M_m(z)$ se hicieron con seis y con ocho cifras significativas. El segundo valor alteraba $F(R)$ sólo en la quinta cifra significativa, y en consecuencia no se usó. Las integraciones se hicieron con 20 y con 40 intervalos iguales, separadamente, y se encontró que con 20 intervalos se obtenía el mismo orden de exactitud en los resultados de $F(R)$. Todos los cálculos posteriores de $F(R)$ se hicieron con 6 cifras en ν_m y $M(z)$ y con 20 intervalos iguales de integración. Las dos curvas usadas como confrontación tenían valores de $n\omega_0$ de 1 y 20. Estas aparecen en la Figura 8 junto con algunos puntos de los resultados de Rosenblueth y Bustamante. La concordancia es muy buena excepto tal vez para los valores más altos de R_1/\bar{R}_0 donde es de presumir que usaron la expresión asintótica descrita en su trabajo¹. Para calcular $F(R)$ con cuatro cifras significativas se requería un número de cinco términos como máximo en la suma de (2.26). Esto indica que probablemente no fuera necesaria la expresión asintótica.

Después se calcularon curvas teóricas con los correspondientes valores de ns/T para comparar con los histogramas experimentales primeros. Para lograr una exactitud suficiente en la diferenciación numérica posterior al cálculo de $F(R)$, se tomaron en cada curva entre 34 y 70 puntos. En cada punto la derivada se dedujo de las tres ordenadas a cada lado del punto y por tal razón las distribuciones o funciones de densidad de probabilidad de las Figuras 2 a 5, en que se hace la comparación con los 16 histogramas previos, no aparecen completas en algunos casos en los extremos superiores.

Para comparar con los histogramas se ajustó la escala de las curvas teóricas en la siguiente forma. Las abscisas se multiplicaron por las medias experimentales no amortiguadas correspondientes y las ordenadas por factores tales que se obtuviera un área de 1.000. En esta forma las medias experimentales y teóricas quedaron idénticas para el caso no amortiguado. Las Figuras 3 a 5 muestran que para los casos amortiguados los resultados experimentales son consistentemente menores que las curvas teóricas. La tendencia es mayor para los casos de amortiguamiento de 10% en que la diferencia entre la media experimental y teórica es de hasta 4%. Esta discrepancia es de es-

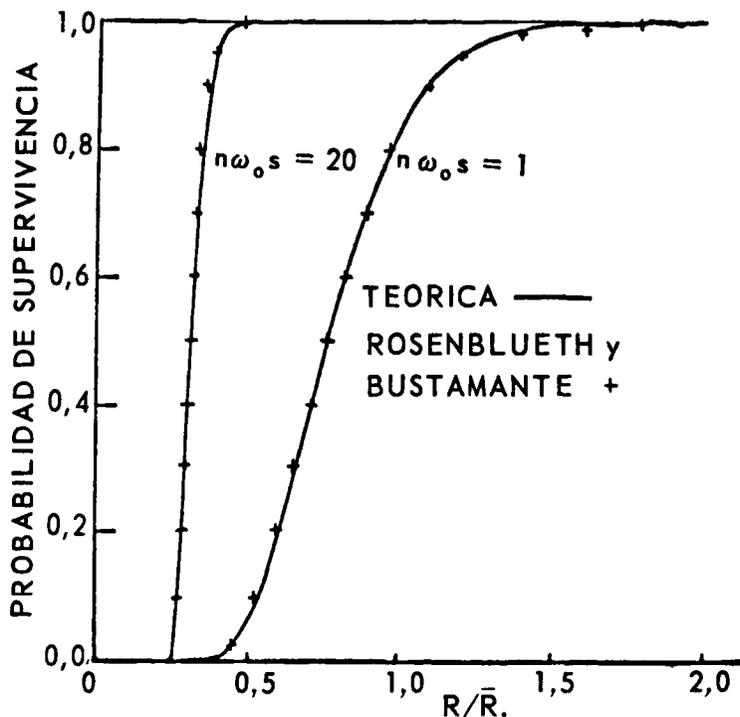


Fig. 8. Comparación de dos distribuciones de probabilidad.

perar para los casos amortiguados, puesto que los resultados experimentales dan la densidad de probabilidad de la velocidad relativa máxima \dot{x} , mientras que el análisis opera con la variable r , ecuación (2.22), la cual puede ser apreciablemente mayor que el máximo \dot{x} . En particular, si la velocidad máxima no se alcanza en la posición de equilibrio $x = 0$, sino en un instante en que $\omega_0 x$ es del orden de, por ejemplo, un quinto del máximo \dot{x} , entonces para 10% de amortiguamiento, r será 4% mayor que \dot{x} . Este cálculo muestra que para ra-

TABLA I
RESPUESTA TEORICA NORMALIZADA MEDIA Y DESVIACIONES ESTANDARES

Curva	$\frac{ns}{T}$	$\frac{n}{T}$ cuando $s = 30$	$\mu = E\left(\frac{R}{R_0}\right)$	σ
A	4,8	0,16	0,268	0,030
B	2,4	0,08	0,353	0,047
C	1,2	0,04	0,455	0,074
D	0,6	0,02	0,573	0,113
E	0,3	0,01	0,685	0,164
F	0,15	0,005	0,803	0,219
G	0,075	0,0025	0,885	0,263
H	0,0375	0,00125	0,938	0,294
I	0,0	0,0	1,0	0,331

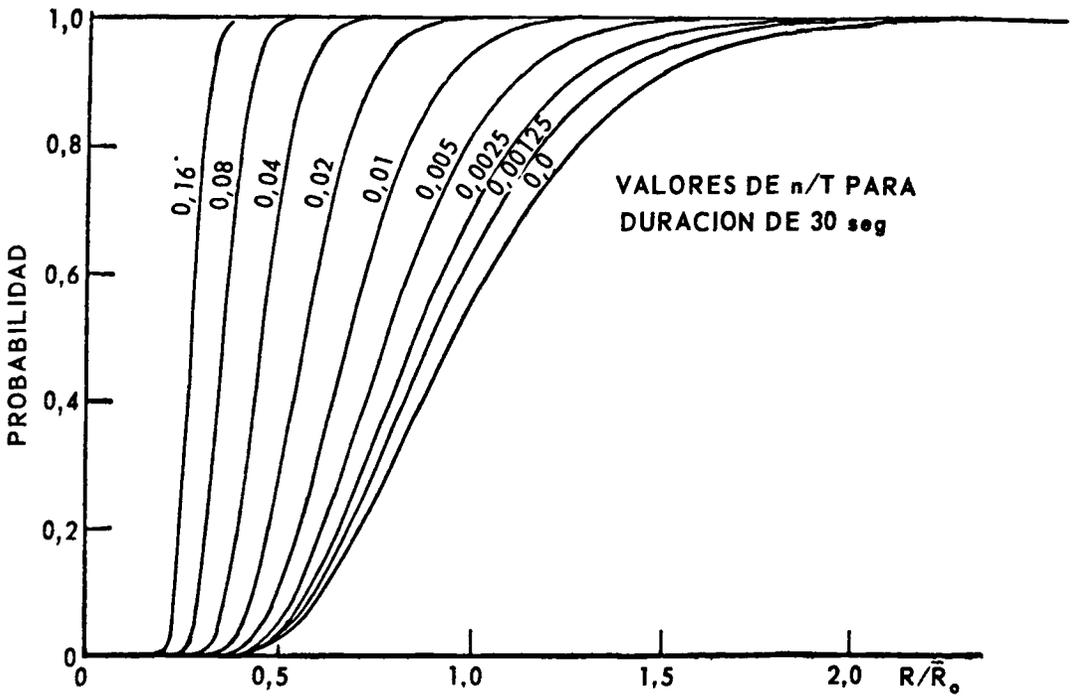


Fig. 9a. Distribuciones de probabilidad teóricas para duración de 30 seg.

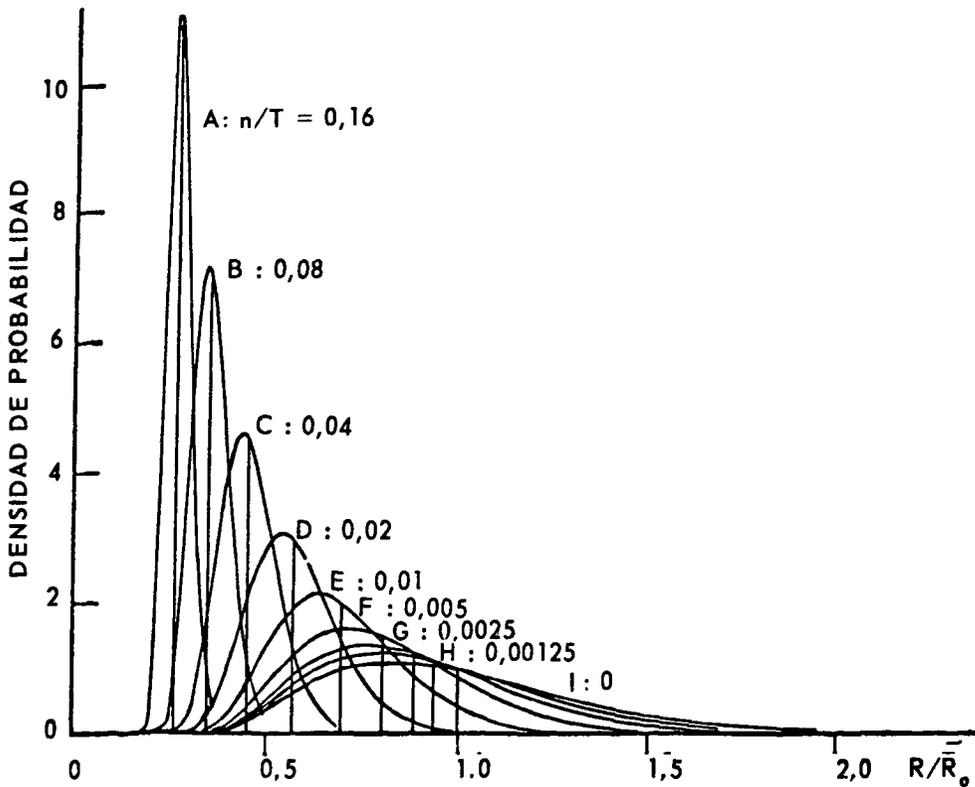


Fig. 9b. Densidades de probabilidad teórica para duración de 30 seg.

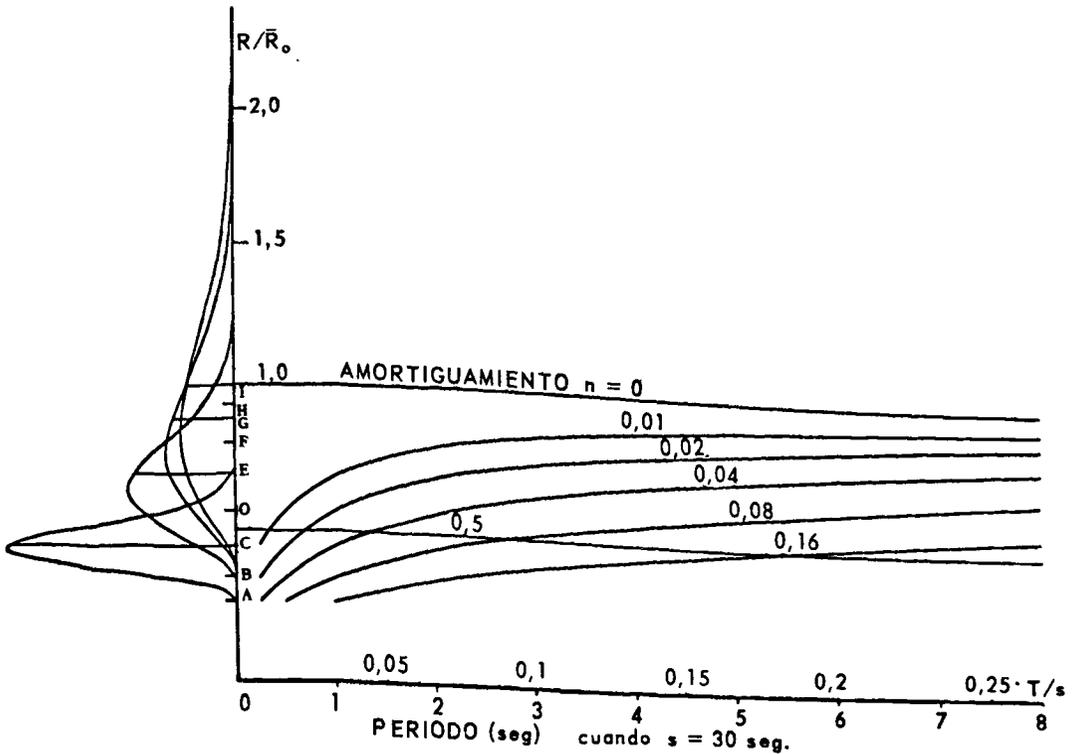


Fig. 10. Espectros de velocidad relativa media y distribuciones en torno a la media.

zones de amortiguamiento elevadas, la variable r no es una buena aproximación del máximo \dot{x} .

En general, sin embargo, las dieciséis comparaciones de Figuras 2 a 5 indican que las distribuciones teóricas obtenidas aquí, bajo las suposiciones que se han hecho, coinciden bien con las distribuciones experimentales de Montecarlo.

Se escogió una nueva serie adecuada de valores del parámetro ns/T para obtener una familia particular de curvas $F(R)$. La elección se basó en un valor de s de treinta segundos y valores de n/T de 0,00125; 0,0025; 0,005, etc. hasta 0,16. Estos valores son adecuados para amortiguamientos de 1, 2, 4 y 8%, y períodos de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4 y 8 segundos. Las funciones de distribución están trazadas en la Figura 9-a y las funciones de densidad obtenidas en la Figura 9-b por diferenciación como antes. Se incluyen las curvas no amortiguadas de figuras 7-a y 7-b. La Tabla I contiene los valores medios y las desviaciones estándares para las nueve curvas. Las distribuciones se designan de A a I para ns/T decrecientes. Es fácil ver como se modifican las distribuciones cuando se hace variar una de estas tres variables n , s o T , manteniendo las otras dos constantes.

Estas curvas pueden presentarse en forma diferente, comparable a la usual de presentación de los espectros de respuesta. Esto se muestra en la

Figura 10. La escala horizontal está en función de T/s o, cuando s se toma como 30 segundos, en función de T . Para cada amortiguamiento particular dado por las seis curvas, la máxima media como fracción de la media no amortiguada está dada por la escala vertical. Cada uno de los máximos medios tiene asociado su correspondiente distribución, cuatro de las cuales se dan en la Figura 10. Como se había señalado ya, cada valor particular del parámetro ns/T define su propia respuesta máxima media y su propia distribución en torno a esta media.

CONCLUSIONES

- 1) La comparación entre los histogramas experimentales y las distribuciones aproximadas indica que ambos planteamientos para determinar las distribuciones dan resultados semejantes.
- 2) Las diferencias dadas por los dos planteamientos se explican por el hecho de que el teórico usa un parámetro que depende conjuntamente de la velocidad relativa y del desplazamiento relativo, en lugar de la velocidad relativa solamente.
- 3) Las técnicas de Montecarlo ofrecen una vía promisoría para abordar los problemas estadísticos de la ingeniería antisísmica.
- 4) Se llega a la conclusión de que las aproximaciones del análisis de Rosenblueth y Bustamante, que fue confirmado satisfactorio por Caughey y Gray sobre bases teóricas, y las aproximaciones de sus cálculos numéricos, se combinan para dar probabilidades de sobrevivencia razonablemente exactas, confirmadas por los cálculos descritos en este trabajo.
- 5) Para valores de amortiguamiento bajos la comparación de los planteamientos analíticos y experimental muestra buena concordancia.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a los profesores D.E. Hudson, G.W. Housner, T.K. Caughey y W.D. Iwan por sus contribuciones a este estudio realizado en el Instituto de Tecnología de California.

BIBLIOGRAFIA

1. HUDSON, D.E. "Response spectrum techniques in Engineering Seismology". World Conference on Earthquake Engineering, Berkeley, California. Junio, 1956.
2. HUDSON, D.E. "Some problems in the application of spectrum techniques to strong-motion earthquake analysis". Bulletin of the Seismological Society of America, vol 52, n° 2 (abril 1962) pp. 417-430.
3. ALFORD, J.L.; HOUSNER, G.W., y MARTEL, R.R. "Spectrum analyses of strong-motion

- earthquakes", California Institute of Technology. Earthquake Research Laboratory (edición revisada, 1964).
4. HOUSNER, G.W., "Behavior of structures during earthquakes", Proceedings ASCE, vol 85, nº EM4 (oct. 1959), pp. 109-129.
 5. HOUSNER, G.W., "Characteristics of strong-motion earthquakes", Bulletin of the Seismological Society of America, vol 37, nº 1 (enero 1947), pp. 19-31.
 6. HOUSNER, G.W., "Properties of strong-motion earthquakes", Bulletin of the Seismological Society of America, vol 45, nº 3, (julio 1955), pp. 197-218.
 7. BYCROFT, G.N., "White noise representation of earthquakes", Proceedings ASCE, vol 86, nº EM2, (abril 1960), pp. 1-16.
 8. ROSENBLUETH, E., y BUSTAMANTE, J.I. "Distribution of structural response to earthquakes", Proceedings ASCE, vol 88, nº EM3 (junio 1962), pp. 75-106.
 9. HOUSNER, G.W., y JENNINGS, P.C. "Generation of artificial earthquakes", Proceedings ASCE, vol 90, nº EM1 (feb. 1964) pp. 113-150.
 10. FELLER, W. "An introduction to probability theory and its applications, John Wiley & Sons. Nueva York, 1958.
 11. BENDAT, J.S. "Principle and Applications of Random noise theory" John Willey & Sons, Nueva York, 1958.
 12. JUNCOSA, M.L., Discusión de "Distributions of structural response to earthquakes" por E. Rosenblueth y J.I. Bustamante, Proceedings ASCE, vol 89, nº EM1 (febrero 1963), pp. 91-92.
 13. CAUGHEY, T.K. y GRAY, A.H., Discusión de "Distribution of structural response to earthquakes" por R. Rosenblueth y J.I. Bustamante, Proceedings ASCE, vol 89 nº EM2, (abril 1963) pp. 159-168.
 14. ABRAMOVITZ, M., y STEGUN, I.A., "Handbook of Mathematical functions" Dover Publications, Inc. 1965.
 15. BRADY, A.G. "Studies of response to earthquake ground motion" P.H. D. Thesis, California Institute of Technology, 1966.

DISTRIBUTIONS OF MAXIMUM RESPONSE TO RANDOM EXCITATION

SUMMARY:

The confidence with which average response spectra can be regarded depends on the spread or distribution of individual spectral values about this average. The distribution of the maximum relative velocity response has been investigated experimentally by Monte Carlo techniques using an electrical analog of white noise excitation with constant duration. Tabulated results of the means and standard deviation for several values of damping and period, and the histograms presented, indicate how the distributions depend on these two structural parameters.

Confirmation of the distributions is sought by analytical methods. An extension of Rosenblueth and Bustamante's results allows analytical expressions to be found for the distributions of a quantity differing little from the relative velocity, again using white noise excitation. Electronic digital computation confirms that Rosenblueth's approximate numerical techniques produce accurate probabilities of survival. Further computations have been made to produce a family of distributions of approximate maximum response, normalized with respect to the undamped maximum response. Each member of the family, with its mean and standard deviation, depends on the parameter $\eta s/T$. Hybrid computation, utilizing both analog and digital computers where each can be used to best advantage, has proved invaluable in aiding the Monte Carlo studies.