

LAS PROPIEDADES DE HISTERESIS DE LOS SUELOS Y LA APROXIMACION LINEAL¹

Ricardo DOBRY*
Robert V. WHITMAN**
José M. ROESSET***

RESUMEN

Se estudia la relación tensión deformación tiempo para suelos estables sometidos a cargas cíclicas de corte. Se pasa revista a resultados experimentales y teóricos y se concluye que la relación tensión deformación es independiente del tiempo y es no lineal e histerética. Un sólido de Kelvin-Voigt con viscosidad inversamente proporcional a la frecuencia (sólido lineal histerético) da una aproximación lineal del comportamiento para una carga de régimen sinusoidal. Queda definido por el módulo de rigidez G y la razón de amortiguamiento β , ambos son independientes de la frecuencia pero dependen del nivel de deformación.

Para cargas transientes el modelo puede usarse en conjunción con las técnicas de descomposición de Fourier y el principio de superposición. Se discute la validez de esta aproximación y la forma tradicional de introducir en los estudios de amplificación la dependencia de los parámetros del suelo de la deformación, y se propone un procedimiento nuevo.

INTRODUCCION

Un problema fundamental en dinámica de suelos y en ingeniería sísmica es establecer las leyes básicas que relacionan las tensiones con las deformaciones y con el

¹ Este trabajo es prácticamente igual a la tesis doctoral de Ricardo Dobry, con ligeras modificaciones.

*Ingeniero, Woodward-Lundgren & Associates, California, U.S.A.

**Profesor de Ingeniería Civil. Jefe del Depto. de Estructuras, Massachusetts Institute of Technology.

***Profesor de Ingeniería Civil, Massachusetts Institute of Technology.

tiempo en los suelos sometidos a cargas cíclicas. Ellas determinan la forma en que las ondas sísmicas son transmitidas y modificadas por el suelo. Este trabajo está orientado a buscar un buen modelo del comportamiento mecánico para el cálculo de la respuesta del suelo a excitación sísmica. Sólo se consideran casos de suelo estable (los fenómenos de inestabilidad, como licuación de suelos, no se tratan).

Durante los terremotos se pueden propagar a través del suelo varios tipos de ondas de volumen y de superficie. Las primeras, tanto de corte como de compresión, son las que más interesan en este análisis, porque están asociadas a sistemas simples de tensión y además, porque la mayoría de los análisis de amplificación en perfiles de suelo formados por capas horizontales suponen que el origen principal de los movimientos horizontales son ondas de corte que se propagan verticalmente. La propagación de una onda de cizalle induce en el elemento del suelo un estado de cizalle puro que debe superponerse a la tensión estática; esto se muestra en la Fig. 1a. El paso de una onda de compresión induce un estado de compresión unidimensional como se ve en la Fig. 1b.

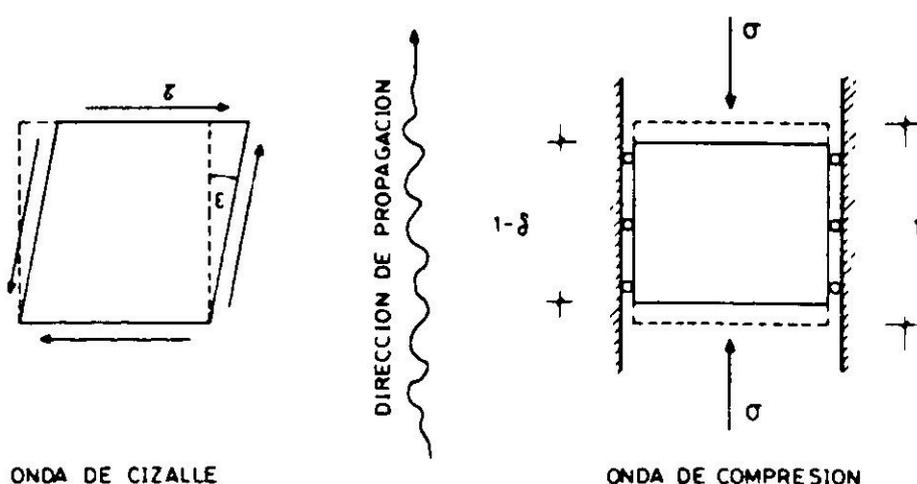


Fig. 1. Incrementos de tensión ocasionados por: a) onda de corte; b) onda de compresión.

Las ecuaciones para ambos tipos de ondas tienen igual forma. En este trabajo nos concentraremos en las ondas de cizalle.

El problema básico es determinar una relación tensión-deformación-tiempo para el suelo, aplicable al caso de cizalle puro. Esta relación se esquematiza como un resorte $\tau = \tau(\epsilon, t)$ de propiedades desconocidas, Fig. 2, que relacionaría τ con

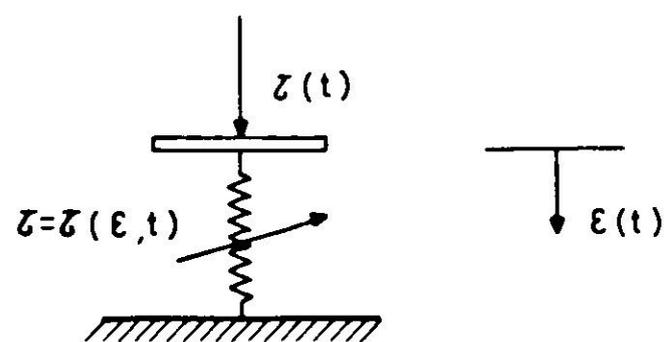


Fig. 2. Relación constitutiva tensión-deformación-tiempo para un suelo en corte puro.

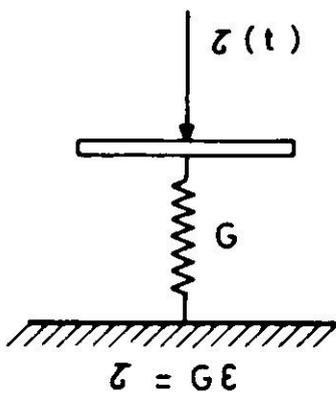
ϵ idealmente para cualquier historia imaginable de carga τ aplicable. Es un hecho bien conocido que la curva tensión-deformación de cizalle de un suelo no es lineal ni siquiera para deformaciones pequeñas¹. La relación que estamos buscando estaría determinada en principio por los factores que se sabe que influyen las curvas deformación-tensión en los suelos, y además por variables adicionales que se derivan de la aplicación rápida y del carácter cíclico de $\tau(t)$. Una suposición tácita que se hace al

relacionar τ con ϵ sin considerar cambios de volumen es de que los efectos de dilatación pueden ser despreciados. Esto es cierto generalmente para la ampli-ficación sísmica en los suelos, en que la deformación por cizalle es $\epsilon \leq 0.5\%$.

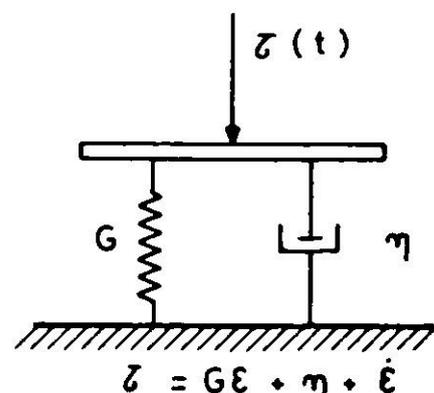
Se ha propuesto expresar la tensión como una función de ϵ y sus primeras n derivadas con respecto al tiempo³:

$$\tau = \tau (\epsilon, \dot{\epsilon}, \ddot{\epsilon}, \dots \epsilon^{(n)}) \tag{1}$$

donde $\dot{\epsilon} = \partial\epsilon/\partial t$; $\epsilon^{(n)} = \partial^n\epsilon/\partial t^n$ etc. Si (1) es una ecuación lineal con coeficientes constantes, se dice que el sólido es lineal. Dos ejemplos de modelos lineales son el *sólido elástico* y el *sólido viscoelástico de Kelvin-Voigt* (llamado también *sólido viscoso*). Estos modelos se muestran en la Fig. 3 con sus respectivas ecuaciones.



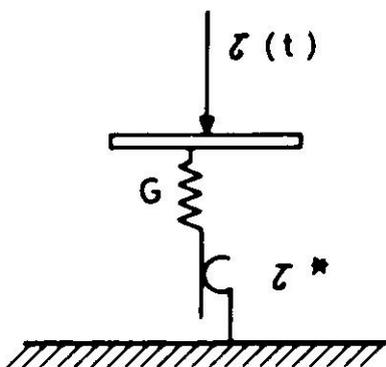
a) SOLIDO ELASTICO
(LEY HOOKE)



b) SOLIDO DE KELVIN - VOIGT

Fig. 3. Ejemplos de sólidos lineales.

Un ejemplo de modelo no lineal es el *sólido elastoplástico* que se esboza en la Fig. 4a y cuya curva de tensión-deformación para carga inicial se ve en la Fig. 4b.



$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \tau / G & \text{para } \tau < \tau^* \\ \epsilon &> \tau^* / G & \text{para } \tau = \tau^* \end{aligned} \right\}$$

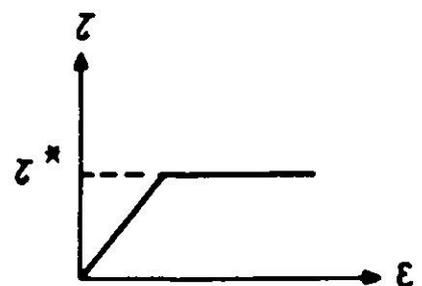


Fig. 4. Sólido elastoplástico: a) modelo y ecuaciones para carga inicial;
b) curva τ - ϵ para carga inicial.

Tanto el sólido elástico como el elastoplástico son independientes del tiempo $\tau = \tau (\epsilon)$. El sólido de Kelvin-Voigt es dependiente del tiempo $\tau = \tau (\epsilon, \dot{\epsilon})$.

CARGA CICLICA Y EFECTO DE LA FRECUENCIA

La propiedad individual más importante del suelo que interesa representar correctamente por (1) es su comportamiento a cargas cíclicas. El caso más simple es el de una carga sinusoidal estable:

$$\tau = \tau_0 \text{ sen } \omega t \quad (2)$$

en que ω = frecuencia circular en rad/s. Se puede mostrar que para sólidos lineales la respuesta es también sinusoidal y de la misma frecuencia:

$$\epsilon = \epsilon_0 \text{ sen } (\omega t - \delta) \quad (3)$$

en que δ es el ángulo de retardo. La ecuación (3) es también aproximadamente válida para valores moderados de ϵ_0 en muchos sólidos no lineales^{4,5}.

Las cargas cíclicas de frecuencia constante son importantes por 3 razones principales:

1. La situación crítica que se intenta predecir por medio de los análisis de amplificación y que, en definitiva, se quiere evitar es la de que el perfil del suelo vibre con una frecuencia única. Si esto último sucediera se puede producir resonancia y falla de las estructuras cuyas frecuencias naturales coinciden con las frecuencias de las oscilaciones⁶.
2. Algunos de los ensayos de laboratorio usados para medir propiedades dinámicas se valen de vibraciones forzadas o libres para ese objeto. En ambos casos la muestra se hace oscilar con frecuencia única⁷.
3. Los procedimientos de computación usuales para predecir los efectos de amplificación operan con un modelo *lineal equivalente* del perfil del suelo. Para determinar la respuesta del sistema se superponen las respuestas modales o de los componentes del espectro de Fourier⁸. Ambos métodos de superposición incluyen como una etapa intermedia una respuesta a una frecuencia única (o a una frecuencia casi única).

La Fig. 5 muestra la relación tensión-deformación de un sólido elástico y la de un sólido de Kelvin-Voigt sometidos a cargas sinusoidales. La deformación oscila en ambos casos entre ϵ_0 y $-\epsilon_0$. En el caso elástico el ciclo completo queda representado por un segmento de una línea recta, $\delta = 0$, y no hay pérdida de energía. En el caso de Kelvin-Voigt, el ciclo es una elipse, $\delta \neq 0$, y el área encerrada por la elipse es la energía disipada en el amortiguamiento por ciclo y por unidad de volumen.

Para el sólido de Kelvin-Voigt, puede demostrarse que el área encerrada en el ciclo, ΔW , es una función del producto $\eta\omega/G$ (aproximadamente $\Delta W \sim \eta\omega/G$). En consecuencia, la disipación de energía es mayor para frecuencias altas que para frecuencias bajas y se aproxima a 0 para cargas cíclicas casi-estáticas.

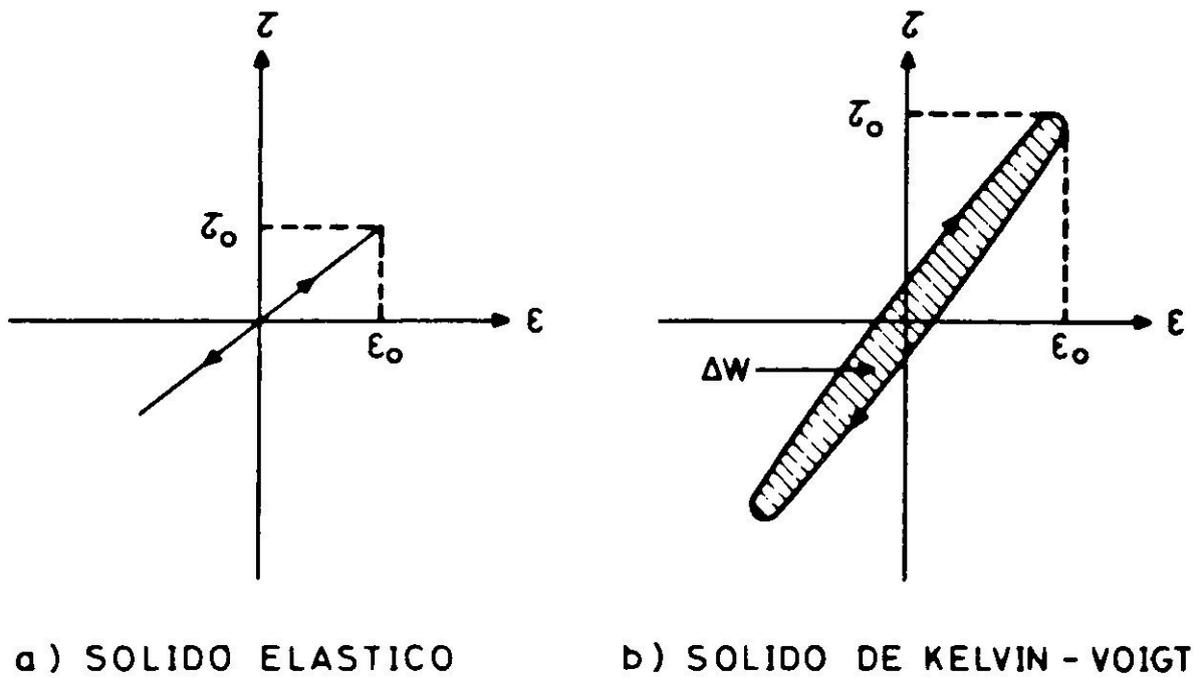


Fig. 5. Ciclos de tensión para cargas sinusoidales.

Krisek y Franklin⁹ determinaron experimentalmente el ciclo tensión-deformación de una arcilla caolinítica sometida a cizalle sinusoidalmente variable. Usaron un cono rheogoniométrico que induce un estado de tensión aproximadamente uniforme en la masa del suelo. En la Fig. 6 se muestra con una línea llena la curva experimental para una carga de baja frecuencia $f = \omega/2\pi = 0.95$ cps.

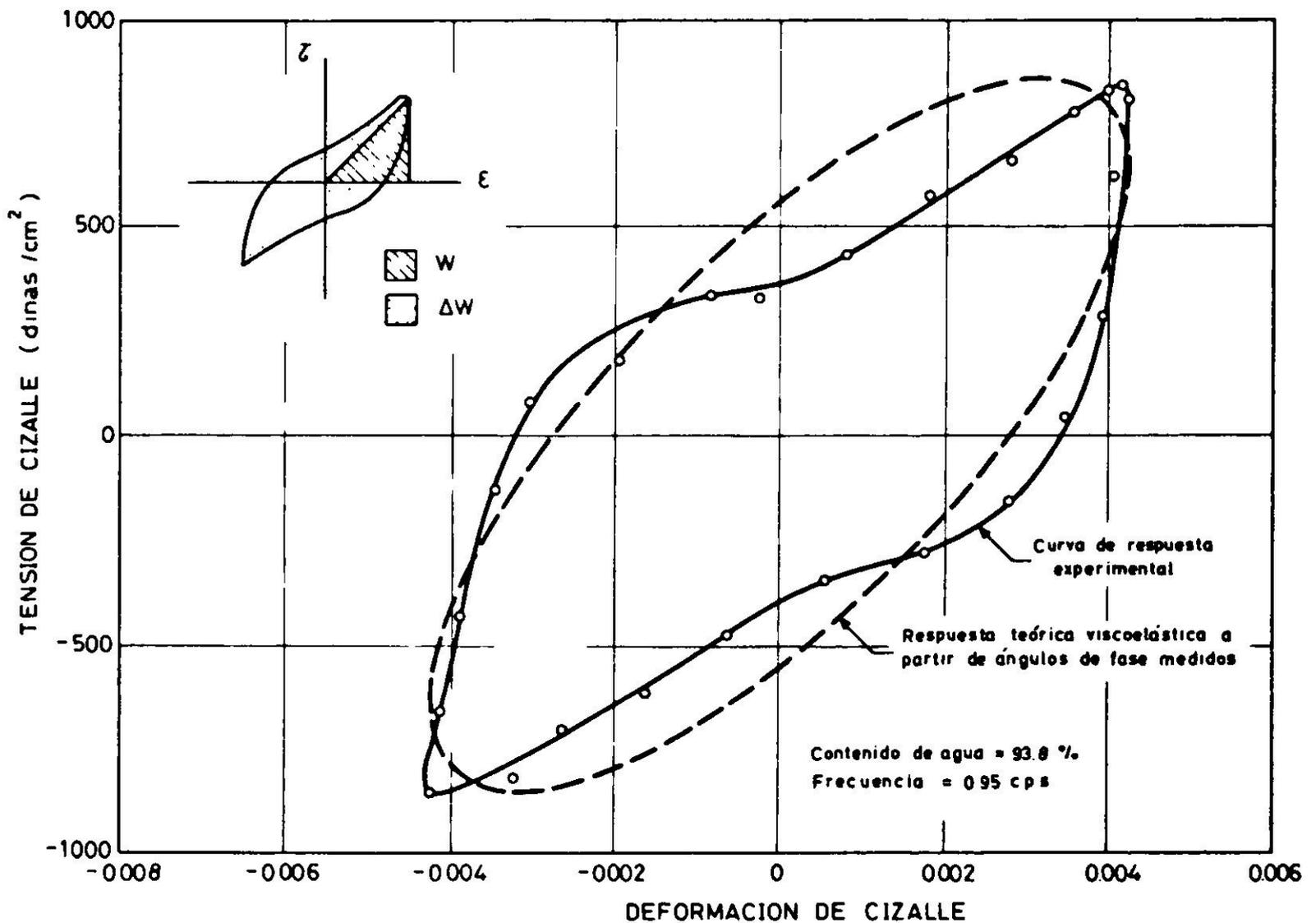


Fig. 6. Ciclos de histéresis para deformación harmónica oscilatoria⁹.

Es posible definir un sólido de Kelvin-Voigt equivalente que reproducirá aproximadamente la respuesta medida de la Fig. 6. El procedimiento usual es hacer G igual a la pendiente de la línea que une los puntos más altos y más bajos del ciclo experimental (módulo secante) y elegir η de modo que el área medida, ΔW , calce para la frecuencia respectiva¹⁰. En la Fig. 6 se ha superpuesto con líneas de trazos la elipse de un sólido equivalente Kelvin-Voigt (seleccionado por los autores en una forma un poco diferente a aquella descrita más arriba).

Si se reemplaza el sólido real por el sólido de Kelvin-Voigt equivalente debe esperarse un ciclo de mayor área si la frecuencia de oscilación aumenta. La Fig. 7 muestra los ciclos experimentales obtenidos por Krisek y Franklin⁹ para diversas frecuencias entre 0.095 y 9.5 cps. Todos los ciclos son prácticamente idénticos y $\Delta W = \text{constante}$.

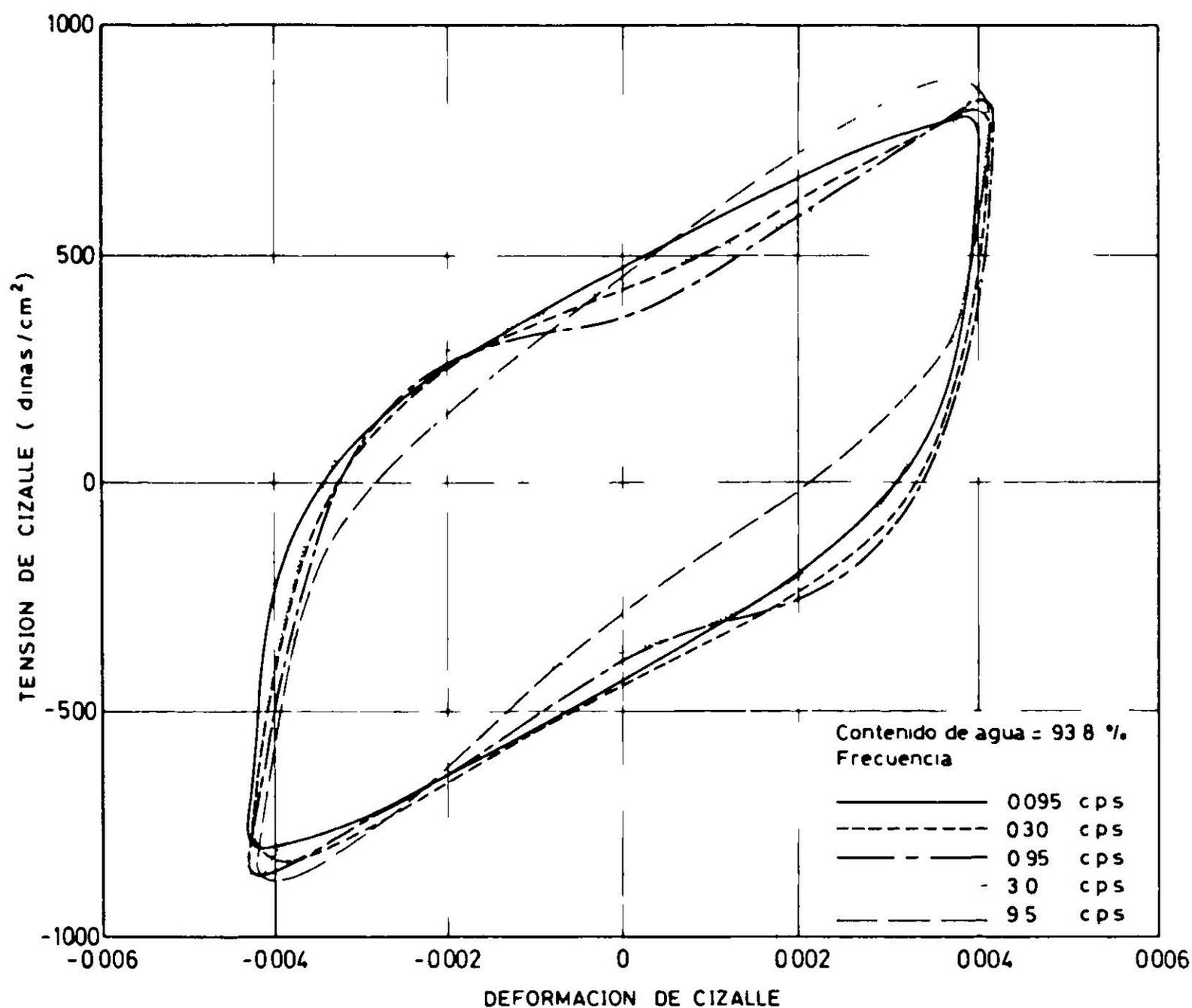


Fig. 7. Ciclos de histéresis para frecuencias variables⁹.

Esta constancia del ciclo tensión-deformación a diferentes frecuencias y para una misma deformación máxima ha sido verificada por varios autores para diferentes tipos de suelos^{11,9,12,13,2}. La independencia con respecto a la frecuencia se mantiene en suelos secos no cohesivos desde esencialmente 0 hasta unos pocos

cientos de ciclos por segundo. En suelos cohesivos, las frecuencias por encima de 0.1 cps tienen algún efecto en el ciclo pero es pequeño; si $f < 0.1$ cps los efectos de fluencia lenta pueden llegar a ser importantes².

Este hecho experimental significa que la relación constitutiva de la Fig. 2 para suelos es una función $\tau = \tau(\epsilon)$ independiente del tiempo y no lineal. Una vez que se da la historia de las cargas, la historia de las deformaciones se puede calcular despreciando la velocidad de aplicación de las cargas. El origen físico de este comportamiento está en la naturaleza particular de los suelos y en el hecho que las pérdidas de energía se producen principalmente por fricción entre granos más bien que por efectos viscosos¹⁴.

Es interesante anotar que las mediciones en muestras de roca indican también ciclos tensión-deformación independientes de la frecuencia. Un comportamiento del tipo friccional explica también, en tal caso, las pérdidas de energía. Esto es cierto aunque los valores absolutos de ϵ_0 y ΔW son generalmente mucho menores para rocas que para suelos¹⁵. Los resultados de ensayos con grandes deformaciones cíclicas realizados en una estructura de acero sugieren que la constancia del ciclo es también una hipótesis razonable para predecir el comportamiento dinámico de estructuras después de la fluencia¹⁶.

LA APROXIMACION LINEAL

Hardin¹¹ sugirió adoptar el sólido de Kelvin-Voigt como un buen modelo para suelos. Para eliminar la discrepancia mencionada en el capítulo anterior y para obtener un ciclo independiente de la frecuencia, propuso hacer la viscosidad, η , inversamente proporcional a la frecuencia, manteniendo G constante. Resulta una nueva constante del material, β , y:

$$\begin{aligned} \eta \text{ se reemplaza por } 2\beta G/\omega \\ \eta\omega/G \text{ se transforma en } 2\beta = \text{constante} \\ \Delta W = \Delta W (\eta\omega/G) \text{ se transforma en } \Delta W = \Delta W (2\beta) = \text{constante} \end{aligned} \quad (4)$$

En esta forma el comportamiento del suelo no lineal e independiente del tiempo queda representado por un modelo que modifica un sólido lineal y dependiente del tiempo. Debe tenerse en cuenta que este nuevo sólido es una ficción matemática y que no tiene una ecuación general de la forma $\tau = \tau(\epsilon)$; ϵ queda definido sólo si τ tiene la forma (2). El sólido queda definido por dos constantes: G y β . G es el módulo de corte del material y no necesita mayor explicación. β se denomina usualmente la *razón de amortiguamiento* del material y tal nombre ha sido el origen de algunas confusiones. El concepto de *razón de amortiguamiento*, D , se define usualmente en dinámica en relación con un sistema de un grado de libertad que consta de una masa, un resorte y un *amortiguador* viscoso. Aunque hay casos de suelos para los cuales los valores numéricos de β y D pueden suponer-

se iguales para fines prácticos, ellos envuelven conceptos diferentes: β es una propiedad del material que depende sólo de su función tensión-deformación; a la inversa de D , en la definición de β no interviene una masa¹⁷.

Hardin¹¹ usó este sólido con éxito para explicar los resultados de ensayos de vibraciones forzadas en arena. Si se usa en conjunción con el principio de superposición y las técnicas del transform de Fourier, el nuevo sólido predice los siguientes efectos que han sido verificados en general por medidas de laboratorio y terreno¹⁴:

1. La atenuación de las ondas móviles es aproximadamente proporcional a la frecuencia¹⁸.
2. Para un sistema continuo cerrado, la razón de amortiguamiento modal es constante (y el decremento logarítmico del modo de vibración libre es constante)^{11, 19}.

Este sólido es el mismo que se usa en Geofísica y Sismología para representar las propiedades de disipación de la corteza terrestre¹⁵. También se ha recomendado para el análisis dinámico de estructuras con el nombre de *amortiguamiento estructural*²⁰. En realidad el modelo se ha usado ampliamente con una variedad de nombres, y esto produce a veces confusión. Algunas de las designaciones que se encuentran en la literatura se muestran en la Tabla I. Los autores han adoptado el nombre *sólido histerético lineal*, que señala el carácter lineal del modelo al mismo tiempo que hace ver su origen físico no lineal.

TABLA I

NOMBRES EQUIVALENTES DEL SOLIDO LINEAL HISTERETICO

Nombre o descripción	Referencia
Histerético lineal	Caughey (1960) ²¹ Dobry (1970) ¹⁴
Amortiguamiento estructural	Hurty y Rubinstein (1964) ²⁰
Viscosidad $\sim 1/\text{frecuencia}$	Hardin (1965) ¹¹
Atenuación $\sim \text{frecuencia}$	White (1965) ¹⁵
Sólido de fricción	Knopoff (1956) ²²
Sólido generalizado	Iwan (1970) ⁵
Sólido tipo I	Snowdon (1968) ³
Constante de retardo de fase Constante de capacidad de amortiguamiento Constante de factor de pérdida Constante de razón de amortiguamiento Constante de decremento logarítmico Constante Q Constante de módulo complejo	Kudo y Shima (1970) ¹⁸ White (1965) ¹⁵ Krissek y Franklin (1967) ⁹ Dobry (1970) ¹⁴

Se han hecho varios estudios experimentales para determinar la influencia en G y β de las propiedades del suelo, del estado de tensiones en el terreno, y de otros factores. Las publicaciones de Hardin y Drnevich^{23,2} y Seed e Idriss²⁴ son recopilaciones excelentes y recientes de estos estudios, con recomendaciones para el diseño.

EFFECTO DE LAS DEFORMACIONES

La Fig. 8 muestra ciclos idealizados correspondientes al mismo elemento de suelo. La única diferencia entre ellos reside en el valor de la deformación máxima ϵ_o .

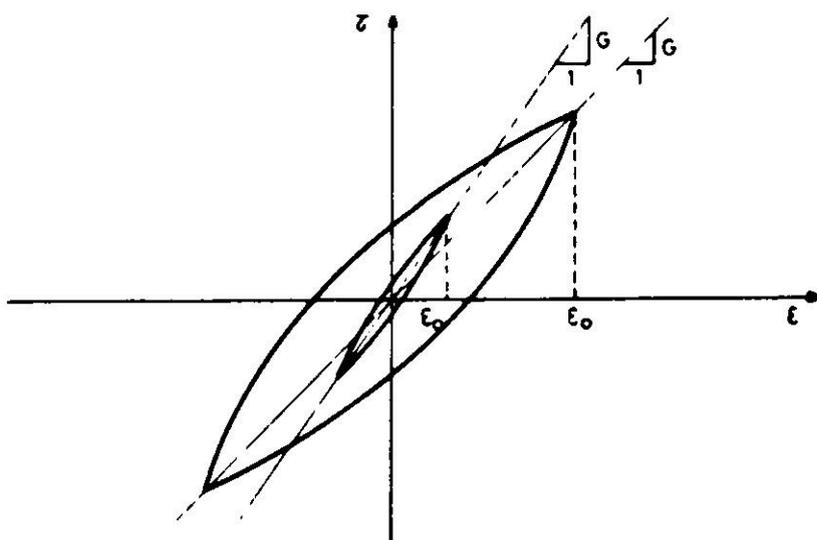


Fig. 8. Efecto de la deformación máxima en el ciclo tensión-deformación.

Si se ajusta a cada uno de estos 2 ciclos un sólido histerético lineal por el método indicado anteriormente se encuentra que:

1. El ciclo de mayor área tiene un valor de G inferior al del ciclo pequeño.
2. El ciclo mayor tiene un valor de β más grande que el del ciclo pequeño.

Se ha encontrado experimentalmente que esta influencia de la deformación es muy importante. En la Fig. 9 se presenta el trazado de $G/G_{m\acute{a}x}$ versus ϵ_o para arenas, en que $G_{m\acute{a}x}$ es el valor del módulo para deformaciones muy pequeñas. La Fig. 10 presenta la curva de β con respecto a ϵ_o también para arenas. Las curvas llenas de ambas figuras son términos medios de muchos ensayos y las líneas de segmentos indican la dispersión de los datos²⁴.

Este efecto de la deformación es de una extraordinaria importancia para los efectos de la amplificación. Para un sitio y un perfil de suelo determinados el nivel de las deformaciones quedará determinado por la intensidad y el contenido de frecuencias de las ondas sísmicas que llegan al lugar. El aumento de la razón de amortiguamiento desde valores de alrededor de 3% (para deformaciones muy pequeñas) a valores de 15 a 25% (para deformaciones grandes) significa que la amplificación será mucho menor para terremotos fuertes que para los débiles. Una consecuencia adicional es que las razones de amplificación obtenidas a partir de terremotos débiles o microsismos no pueden extrapolarse directamente a terremotos fuertes.

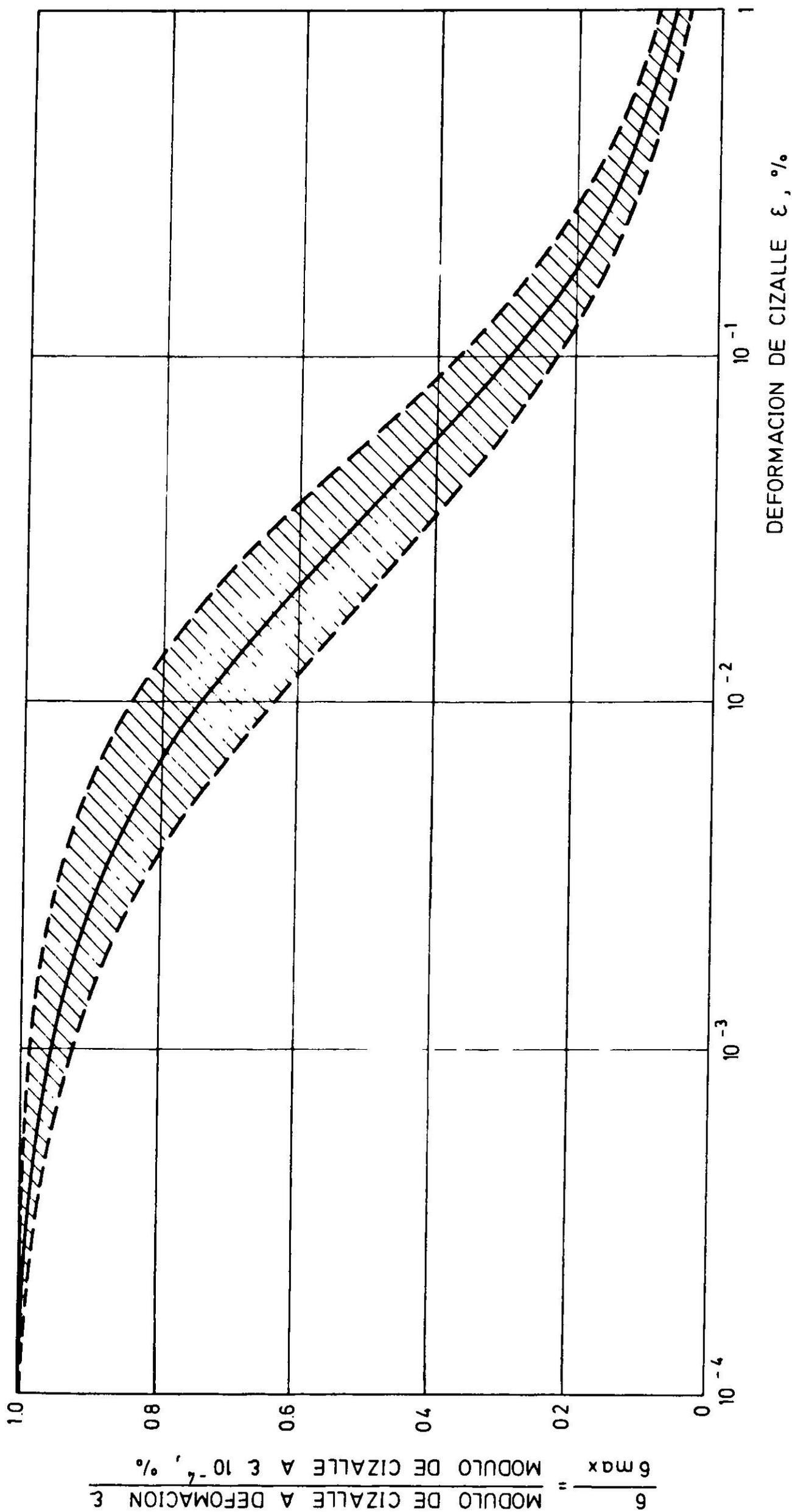


Fig. 9. Variación del módulo de corte en función de la deformación para arenas²⁴.

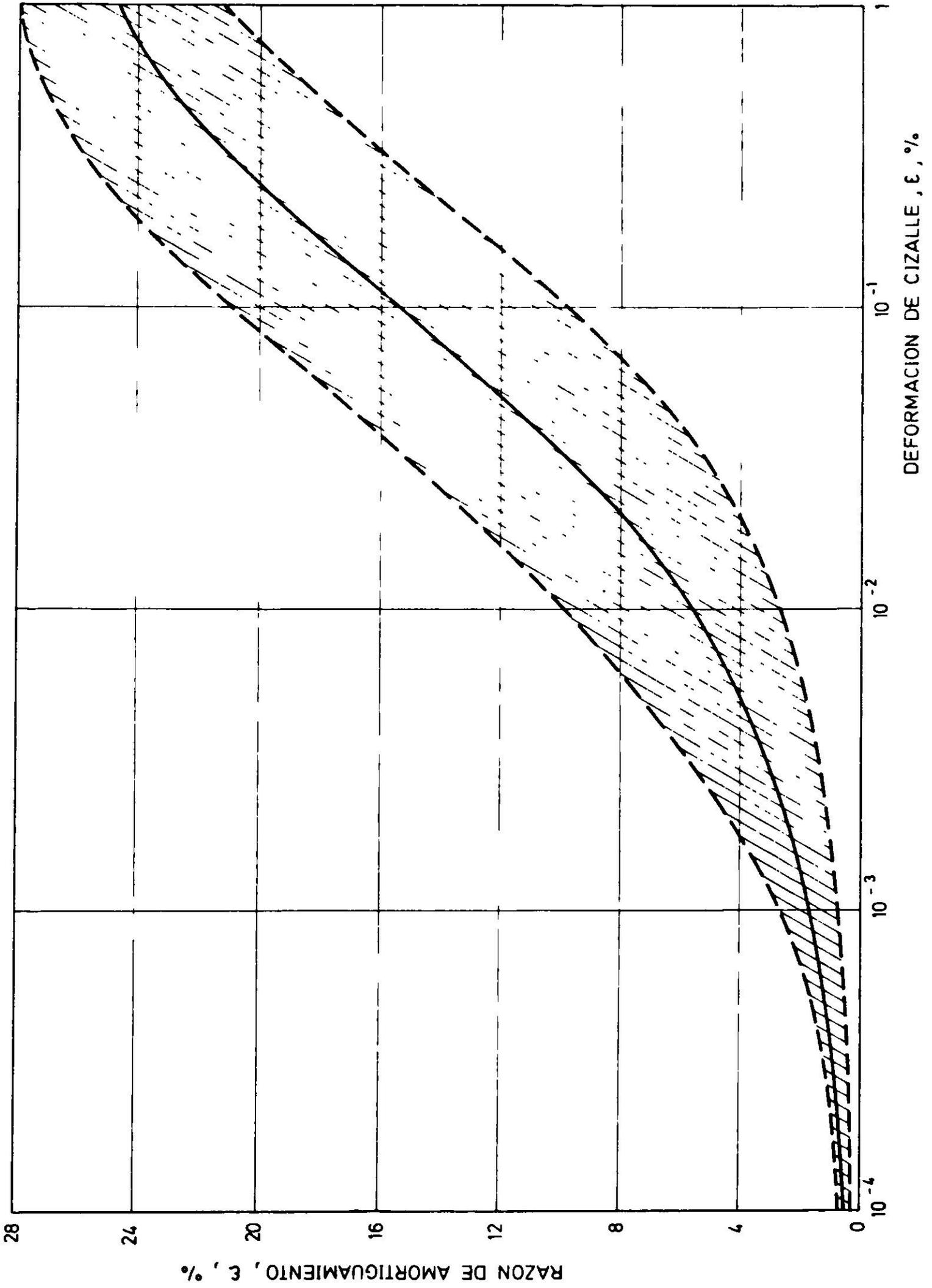


Fig. 10. Razones de amortiguamiento para arenas²⁴.

El origen y los valores de β para deformaciones muy pequeñas no es claro. Hardin y Drnevich²³ sugieren que el amortiguamiento tiende a 0 cuando la deformación tiende a 0. Seed e Idriss²⁴ piensan que β es aproximadamente constante para deformaciones muy pequeñas. Esta última hipótesis parece más convincente porque para deformaciones más pequeñas la disipación de energía debida a la viscosidad y a otras fuentes independientes de la deformación se hace más importante. Para valores muy grandes de la deformación, β parece tender a un valor máximo, $\beta_{m\acute{a}x}$, asintóticamente. Esta hipótesis de un $\beta_{m\acute{a}x}$ (que es del orden de 20 a 30%) está respaldada por resultados de ensayos y por cálculos basados en los modelos matemáticos del ciclo^{23, 14}.

Para deformaciones muy pequeñas ($\epsilon_o \leq 0.25 \times 10^{-4}$ cm/cm), $G \cong G_{m\acute{a}x}$. Este valor de $G_{m\acute{a}x}$ coincide con la tangente de la curva tensión-deformación en el origen y puede obtenerse por prospección sísmica del lugar. Hardin y Drnevich² sugieren el uso de una expresión general para $G_{m\acute{a}x}$, válida para arenas y para muchos suelos cohesivos no perturbados:

$$G_{m\acute{a}x} = 1230 \frac{(2.973 - e)^2}{1 + e} (OCR)^K \bar{\sigma}_o^{1/2} \quad (5)$$

en que e = razón de vacíos, OCR = razón de sobre consolidación, $\bar{\sigma}_o$ = tensión efectiva media. Tanto $\bar{\sigma}_o$ como $G_{m\acute{a}x}$ están en psi, y K depende del índice de plasticidad, PI , del suelo como se ve en la Tabla II.

TABLA II
VALORES DE K PARA LA ECUACION (5)
(HARDIN Y DRNEVICH 1972)²³

PI	K
0	0
20	0.18
40	0.30
60	0.41
80	0.48
≥ 100	0.50

La ecuación (5) se usó para estimar el valor de $G_{m\acute{a}x}$ de arenas fluviales y limos de Concepción, hasta una profundidad de 120 m. Estas estimaciones concordaron bien con mediciones directas de $G_{m\acute{a}x}$ obtenidas en una prospección geofísica del Centro de Concepción^{25,26}.

Una vez conocido $G_{m\acute{a}x}$, G puede obtenerse usando curvas como las de la Fig. 9 para hacer las correcciones debidas a la deformación.

CARGAS TRANSIENTES Y SUPERPOSICION

Si un elemento de suelo se somete a excitación sinusoidal, el sólido histerético lineal será una buena representación si G y β se eligen de modo que sean consistentes con la deformación ϵ_0 . Si $\tau(t)$ es una carga transiente que contiene varias frecuencias, la forma de proceder no es clara. La suposición básica que se hace en estudios de amplificación es que las técnicas del Transform de Fourier y la superposición son válidas, y que deben elegirse, para cada elemento de suelo, un par de valores, G y β , consistentes con una deformación *representativa* obtenida de la historia de deformación calculada para ese elemento. Obviamente se debe aplicar el procedimiento de los tanteos. Este enfoque general del *sistema equivalente lineal* ha sido usado extensamente para calcular la respuesta uni y bidimensional de suelos y de sistemas de suelos a excitaciones sísmicas^{27, 28, 29, 30}.

La mejor manera de justificar éste o cualquier otro medio de usar la superposición es estudiando la respuesta del sólido no lineal *real* a $\tau(t)$. Jennings³¹ propuso un modelo matemático del ciclo y definió una serie de reglas para derivar las curvas tensión-deformación para cualquier $\tau(t)$ aplicado. Estas reglas se hicieron concordar con evidencia experimental conocida previamente. Iwan^{5, 32} propuso el uso de un sólido hecho de infinitos elementos elastoplásticos (tales como el que se muestra en la Fig. 4a) colocados en paralelo. G se considera constante por definición para todos los elementos, pero la tensión de fluencia τ^* es variable con una función de distribución conocida. Cuando este modelo se carga sinusoidalmente describe ciclos de formas razonables, y además su comportamiento queda completamente definido³² para cualquier $\tau(t)$. Este modelo es intuitivamente atractivo para suelos, en que cada uno de los elementos elastoplásticos puede imaginarse como correspondiente a los contactos entre 2 partículas. Iwan⁵ usó una función de distribución particular para τ^* para estudiar la respuesta de una viga de corte excitada a la fluencia con una aceleración básica que varía sinusoidalmente.

Para nuestros objetivos, el caso más simple que se puede considerar es la aplicación simultánea de dos cargas que varían sinusoidalmente y que tienen frecuencia e intensidad diferentes:

$$\tau = \tau_1 \text{ sen } \omega_1 t + \tau_2 \text{ sen } (\omega_2 t + \alpha) \quad (6)$$

en que α es el ángulo de fase. Esta situación es importante en la práctica. Corresponde aproximadamente al caso en que dos modos ω_1 y ω_2 del perfil del suelo son excitados simultáneamente. También corresponde al caso en que la onda incidente tiene un contenido alto de la frecuencia ω_1 y excita el modo ω_2 del suelo.

El problema general de la respuesta del suelo no lineal a cargas que varían según (6) es complicado y no se desarrollará aquí. Sin embargo, se harán algunas

consideraciones para el caso especial:

$$\tau_1 \gg \tau_2 \quad ; \quad \omega_1 \ll \omega_2 \quad (7)$$

La ecuación (7) corresponde aproximadamente a la excitación del primer modo (ω_1) y de un modo de muy alta frecuencia (ω_2). Para ese caso la primera condición (7) se cumplirá generalmente debido al pequeño factor de participación del modo superior³³. Este caso se ha esquematizado en la Fig. 11.

El ciclo grande de la Fig. 11 correspondería al caso $\tau = \tau_1 \text{ sen } \omega_1 t$, con $\tau_2 = 0$. El ciclo completo se realiza en $T_1 = 2\pi/\omega_1$ segundos.

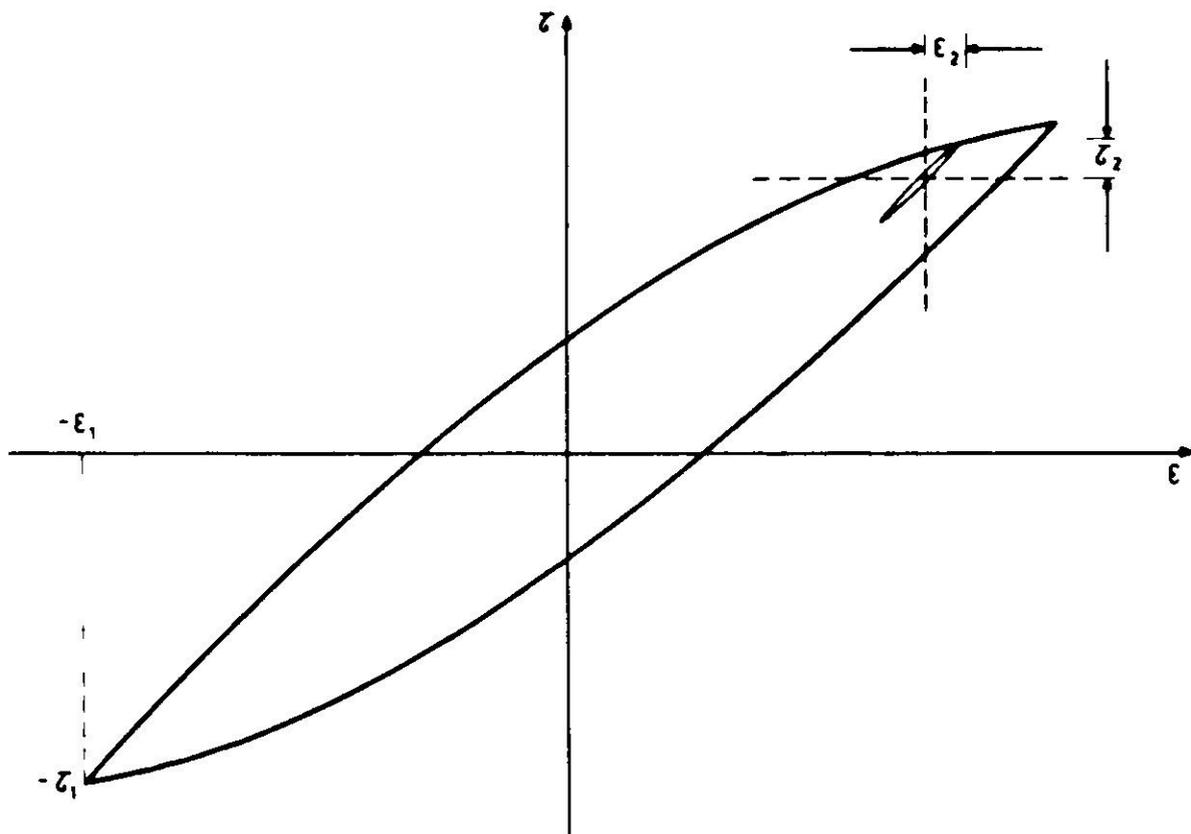


Fig. 11. Superposición de dos cargas sinusoidales.

Si τ_2 es diferente de 0 pero pequeño, se describirá un ciclo pequeño en $T_2 = 2\pi/\omega_2$ segundos. Este pequeño ciclo comienza en un punto indicado en el ciclo grande y vuelve al punto inicial antes que el punto que describe el ciclo mayor, haya tenido tiempo de avanzar en forma significativa. Para cada ciclo grande hay muchos ($\cong \omega_2/\omega_1$) ciclos pequeños; sólo uno de ellos se ha dibujado en la figura.

Si τ_2 es muy pequeño, $\epsilon_2 = \tau_2/G_{m\acute{a}x}$. Esto se debe a que el módulo tangente para cargas pequeñas es prácticamente independiente de la tensión inicial de cizalle. Este hecho ha sido determinado experimentalmente²³; se refleja también en el comportamiento de todos los sólidos propuestos con punto de fluencia, que tienen $G = G_{m\acute{a}x}$, para decrementos de tensiones pequeñas después de un incremento de tensión^{4,32} (inversión de tensiones). Aun más, para un τ_2 que tiene un valor pequeño pero medible, Hardin y Drnevich²³ han presentado evidencia experimental que muestra que la relación entre G y ϵ_2 no es afectada prácticamente por la tensión de cizalle inicial.

Se ha presentado evidencia semejante²³ con respecto a algunos suelos para la razón de amortiguamiento, β . En la Fig. 12 se muestra una curva que hace ver la independencia de β con respecto a la tensión de cizalle inicial para un incremento dado de deformación para un suelo limoso.

Estos datos sugieren que la pendiente y el área del pequeño ciclo son independientes de su ubicación, y que tanto G como β del sólido lineal histerético

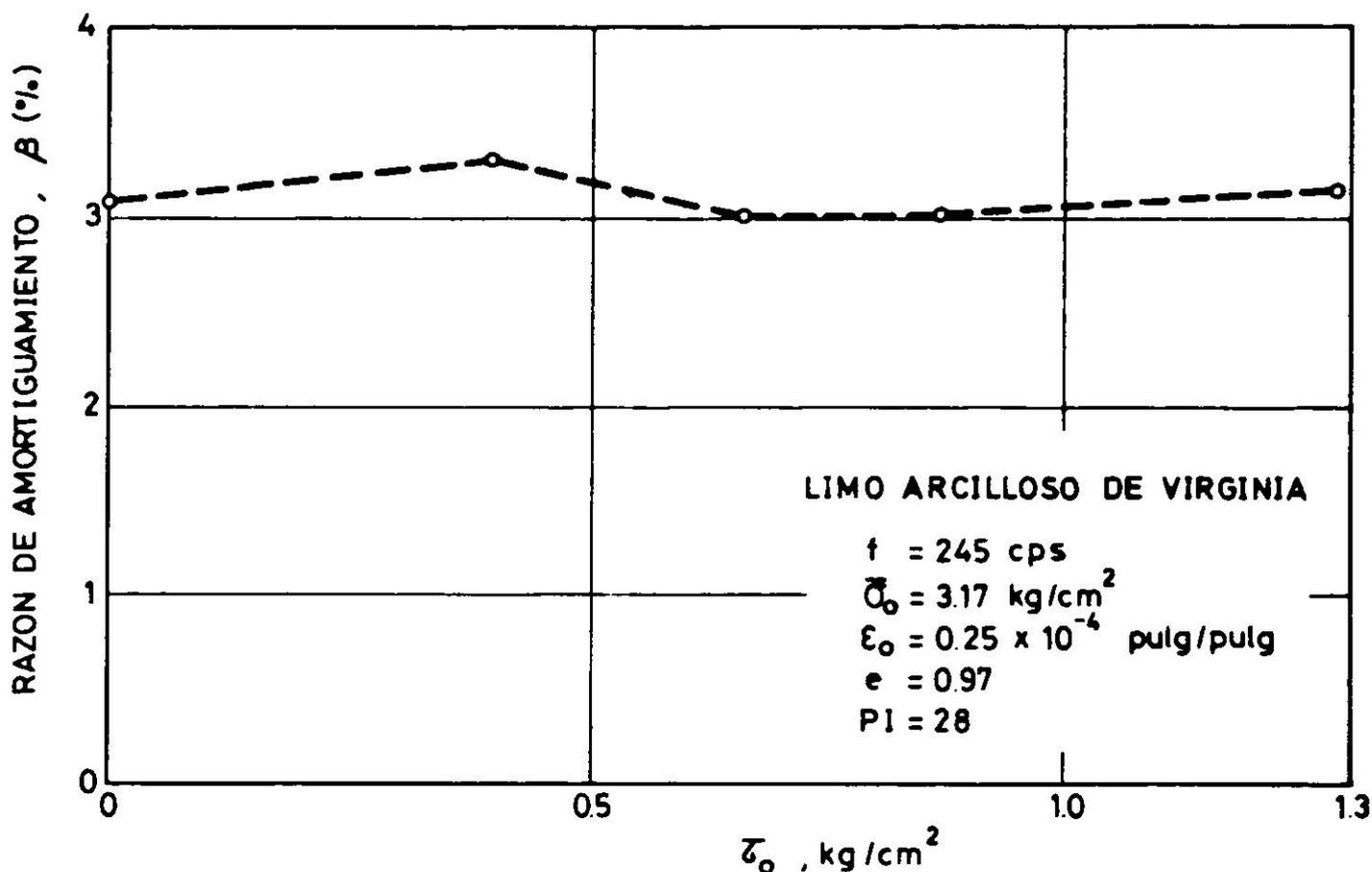


Fig. 12. Razón de amortiguamiento versus tensión inicial de corte para limo arcilloso de Virginia²³.

equivalente son función solamente de ϵ_2 . Estas funciones son las mismas que se obtendrían si no existiera el ciclo grande y $\tau = \tau_2 \text{ sen } \omega_2 t$.

Si el argumento presentado más arriba es aceptado, es aplicable en este caso la superposición en la forma indicada en la Fig. 13. Se definen dos sólidos histeréticos lineales por cada uno de los términos de (6) y se ajustan las propiedades de cada sólido como si el otro término no existiera. Finalmente, se superponen las dos historias de deformación obtenidas en esta forma.

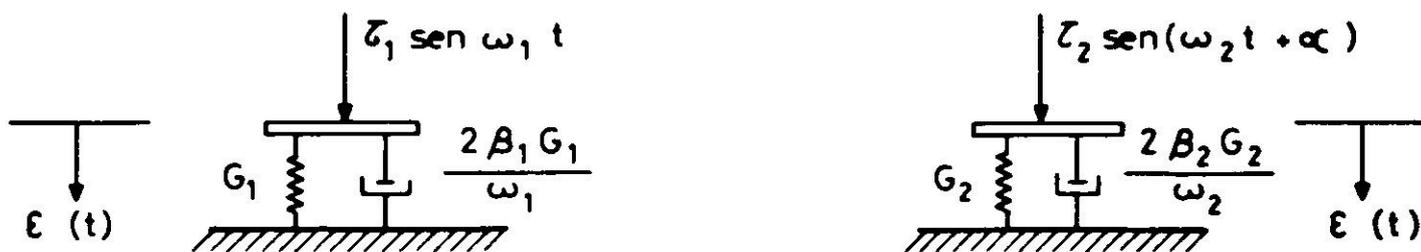


Fig. 13. Principio de superposición para el caso de la Fig. 11.

Un método más preciso usaría $(\tau_1 - \tau_2) \text{ sen } \omega_1 t$ como función de carga del primer sólido. Esto incorporaría el hecho de que el ciclo obtenido del primer sólido debe pasar por los centros de los pequeños ciclos asociados con el segundo

sólido. Naturalmente, la diferencia es despreciable cuando se cumple la condición $\tau_2 \ll \tau_1$. No está claro qué sucede si τ_2 aumenta, si la diferencia entre ω_1 y ω_2 disminuye, o si hay que considerar más de dos frecuencias. Solamente el estudio de sólidos no lineales podría responder algunas de estas interrogantes.

Los resultados que se presentan más arriba sugerirían un mejoramiento del procedimiento que se usa hoy. En vez de calcular la *deformación representativa* del sistema o de la capa y asignar después una razón de amortiguamiento constante a todos los modos, debiera ajustarse primero la respuesta de cada modo a la excitación. Esto significaría que cada razón de amortiguamiento modal debiera calcularse independientemente de modo que fuera consistente con una *deformación representativa* obtenida de la respuesta del modo a la aceleración básica. Este procedimiento daría una razón de amortiguamiento diferente para cada modo y en general tendería a aumentar la importancia de los modos superiores^{5,33}. El procedimiento sugerido debiera dar la respuesta prácticamente correcta por lo menos en dos casos:

- i) la respuesta consiste de dos frecuencias superpuestas que tienen las características definidas más arriba.
- ii) la historia de los desplazamientos consiste de dos o más segmentos separados claramente, cada uno de ellos excita un modo diferente del sistema.

Es interesante dejar constancia que hay cierta evidencia que sugiere la validez de este enfoque en el caso de edificios sometidos a terremotos fuertes. Giberson³⁴ constató la participación relativamente mayor de los modos segundo y tercero comparados con el primero, en una simulación de la respuesta de estructuras no lineales a excitaciones sísmicas. Hart³⁵ estudió la contribución de los tres primeros modos a las respuestas de doce edificios medidos durante el terremoto de 1971 de San Fernando, California, y estableció una correlación entre la razón de amortiguamiento modal y la intensidad del movimiento del suelo al período del modo. La correlación dependía en parte del material del edificio (hormigón o acero), pero era independiente del número de orden del modo.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece al Instituto de Investigaciones y Ensayes de Materiales de la Universidad de Chile y al Programa CHILIAP de cooperación en Ingeniería Civil entre el MIT y la Universidad de Chile, que en conjunto financiaron sus estudios de Doctorado en MIT, de cuya tesis proviene el presente trabajo.

BIBLIOGRAFIA

1. LAMBE, T.W. y WHITMAN, R.V. *Soil Mechanics*, John Wiley and Sons, Inc., New York (1969).
2. HARDIN, B.O. y DRNEVICH, V.P. Shear modulus and damping in soils: Design equations and curves. *Proceedings ASCE*, 98, N° SM7 (julio 1972), pp. 667-692.

3. SNOWDON, J.C. *Vibration and shock in damped mechanical systems*, John Wiley and Sons, New York (1968).
4. JENNINGS, P.C. Periodic response of a general yielding structure. *Proceedings ASCE*, 90, N° EM2 Part 1 (abril 1964), pp. 131-166.
5. IWAN, W.D. Steady-state response of yielding shear structure. *Proceedings ASCE*, 96, N° EM6 (diciembre 1970), pp. 1209-1228.
6. OHSAKI, Y. Effects of local soil conditions upon earthquake damage. *Proceedings Soil Dynamics Specialty Session, 7ª Conferencia Mexicana de Mecánica de Suelos e Ingeniería de Fundaciones*, Ciudad de México (1969), pp. 3-32.
7. RICHART, F.E.; HALL, J.R., y WOODS, R.D. *Vibrations of soils and foundations*, Prentice-Hall Inc., New Jersey (1970).
8. HAGMANN, A.J. y WHITMAN, R.V. Comparison of methods for analyzing soil deposits during earthquakes. *Research Report R69-29*, Dept. of Civil Eng., MIT, Cambridge, Mass. (1969).
9. KRISEK, R.J. y FRANKLIN, A.G. Energy dissipation in a soft clay. *Proceedings International Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials*. University of New Mexico (1968), pp. 797-807.
10. SEED, H.B. The influence of local soil conditions on earthquake damage. *Proceedings Soil Dynamics Specialty Session, 7ª Conferencia Internacional de Mecánica de Suelos e Ingeniería de Fundaciones*, Ciudad de México, (1969), pp. 33-66.
11. HARDIN, B.O. The nature of damping in sands. *Proceedings ASCE*, 91, N° SM1 (enero 1965), pp. 63-97.
12. AISIKS, E.G. y TARSHANSKY, I.W. Soil studies for seismic design of San Francisco transbay tube. *Vibration effects of earthquakes on soils and foundations, ASTM STP 450* (1969), pp. 138-166.
13. DONOVAN, N.C. Evaluation of compatibility between modulus and damping values from hysteresis loops. *Proceedings Soil Dynamics Specialty Session, 7ª Conferencia Internacional de Mecánica de Suelos e Ingeniería de Fundaciones*. Ciudad de México, (1969), pp. 121.
14. DOBRY, R. Damping in soils: its hysteretic nature and the linear approximation. *Research Report R70-14*, Dept. of Civil Eng., MIT, Cambridge, Mass. (1970).
15. WHITE, J.E. *Seismic waves* Mc-Graw-Hill, New York (1965).
16. HUDSON, D.E. Dynamic of full-scale structures. *Earthquake Engineering*, editado por R.L. Wiegel, Capítulo 7, Prentice Hall Inc., New Jersey (1970).
17. DOBRY, R.; WHITMAN, R.V., y ROESSET, J.M. Soil properties and the one-dimensional theory of earthquake amplification, *Research Report R71-18*, Dept. of Civil Eng., MIT, Cambridge, Mass.
18. KUDO, K. y SHIMA, E. Attenuation of shear waves in soil. *Bulletin of Earthquake Research Institute*, vol. 48 (1970), Tokio, pp. 145-158.
19. RASCON, O.A. Estudios encaminados a la predicción de espectros de temblores en el Valle de México. *Boletín Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica*, vol. 11, n° 2 (septiembre 1964), pp. 39-56.
20. HURTY, W.C. y RUBINSTEIN, M.F. *Dynamic of structures*, Prentice Hall, Inc., New Jersey (1964).
21. CAUGHEY, T.K. Classical normal modes in damped linear dynamics systems. *Journal Applied Mechanics* (junio 1960), pp. 269-271.
22. KNOPOFF, L. The seismic pulse in materials possessing solid function. I. Plane waves. *Bulletin of Seismological Society of America*, vol. 46, pp. 175-183.
23. HARDIN, B.O. y DRNEVICH, V.P. Shear modulus and damping in soils: Measurements and parameter effects. *Proceedings ASCE*, 98, N° SM6 (junio 1972), pp. 603-624.

24. SEED, H.B. e IDRIS, I.M. Soil moduli and damping factors for dynamic response analyses. *Report N° EERC 70-10*, University of California, Berkeley (1970).
25. POBLETE, M. y DOBRY, R. Modelo dinámico del sub-suelo de Concepción. *Revista del IDIEM*, vol. 7, n° 3 (diciembre 1968), pp. 111-136.
26. DOBRY, R., y POBLETE, M. Discussion of vibration modulus of normally consolidated clay, by Hardin, B.O., and Black, W. *Proceedings ASCE*, 95, N° SM2 (marzo 1969), pp. 659-662.
27. IDRIS, I.M. y SEED, H.B. Seismic response of horizontal soil layers. *Proceedings ASCE*, 94, N° SM4 (julio 1968), pp. 1003-1031.
28. ROESSET, J.M., y WHITMAN, R.V. Theoretical background for amplifications studies. *Research Report R69-15*, Dept. of Civil Eng., MIT, Cambridge, Mass.
29. SCHNABEL, P.B.; LYSMER, J., y BOLTON, H. SHAKE — A computer program for earthquake response analysis of horizontally layered sites. *Report N° EERC 72-12*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.
30. LYSMER, J.; UDAKA, T.; SEED, H.B., y HWANG, R. LUSH — A computer program for complex response analysis of soil-structure systems. *Report N° EERC 74-4*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.
31. JENNINGS, P.C. Earthquake response of a yielding structure. *Proceedings ASCE*, 91, N° EM4, Part 1 (agosto 1965), pp. 41-68.
32. IWAN, W.D. On a class of models for the yielding behaviour of continuous and composite systems. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 34, n° 3 (septiembre 1967), pp. 612-617.
33. DOBRY, R. Discussion of Iwan⁵. *Proceedings ASCE*, 97, N° EM5 (octubre 1971), pp. 1577-1578.
34. GIBERSON, M.F. *The response of non-linear multi-story structures subjected to earthquake excitation*. Ph. D. Thesis, CALTECH, Pasadena, California (1967).
35. HART, G.C., y VASUDEVAN, R. Earthquake design of buildings: damping. *Proceedings ASCE*, 101, N° ST1 (enero 1975), pp. 11-30.

THE HYSTERETIC PROPERTY OF SOILS AND THE LINEAR APPROXIMATION

SUMMARY:

The stress-strain-time behavior of soils subjected to cyclic shear loading is studied for cases when the soil remains stable. Experimental and analytical results on soils subjected to cyclic shear are reviewed, and it is concluded that the constitutive stress-strain relation is time-independent and nonlinear hysteretic. A linear approximation of this behavior for steady-state sinusoidal loading is a Kelvin-Voigt Solid having viscosity inversely proportional to frequency (Linear Hysteretic Solid). This Solid is defined by two material parameters: the shear modulus, G , and the damping ratio, β . In soils, these parameters are independent of frequency but they depend on the level of strain.

For transient loading, the linear hysteretic representation can be used in conjunction with Fourier decomposition techniques and the principle of superposition. The validity of this approximation and the customary way to introduce the strain-dependency of the soil parameters in amplification studies are discussed, and a new procedure is proposed.