METODO DE ELEMENTOS FINITOS DIRECTO PARA LA INTERACCION LINEAL SUELO-ESTRUCTURA

Francisco MEDINA*

RESUMEN

Se presenta un método de solución directa para estructuras solicitadas dinámicamente sobre medios elásticos semi infinitos. El método consiste en modelar la región cercana a la estructura con elementos finitos y la región lejana con elementos infinitos. La rigidez dinámica de la región lejana a la estructura se representa mediante elementos infinitos en el dominio de frecuencias. Estos elementos son capaces de modelar la radiación geométrica de energía en forma de ondas elásticas de Rayleigh, de corte y de compresión. El método se aplica con éxito en el cálculo numérico de las funciones de flexibilidad dinámica de una placa circular rígida apoyada sobre un medio semi infinito y solicitada armónicamente. Al usar elementos infinitos, el tamaño de la región cercana a la estructura puede mantenerse relativamente pequeño, lo que se traduce en soluciones económicas.

INTRODUCCION

En presencia de solicitaciones dinámicas, la interacción de estructuras con el suelo es materia de bastante interés. Actualmente se dispone de varias técnicas numéricas y analíticas complicadas, aproximaciones ingenieriles simples y, eventualmente, algoritmos de computación elaborados para resolver problemas de

* Departamento de Geofísica, Universidad de Chile, Santiago.

interacción suelo-estructura. Las técnicas de solución caen bajo dos planteamientos básicos: un planteamiento directo y un planteamiento mediante subestructuración. El primero resuelve el problema en un solo paso, considerando el sistema suelo-estructura de una vez. El segundo, formulado de varias maneras por diferentes autores, puede ser básicamente resumido como una solución de tres pasos, a saber: el problema de la impedancia de la fundación, el problema de dispersión de ondas en el medio de apoyo y el análisis de interacción en la estructura. Cada uno de estos dos planteamientos tiene ventajas y desventajas, pero no está claro que haya una marcada superioridad de uno de ellos sobre el otro. Actualmente, la elección de uno u otro planteamiento se basa en la familiaridad que tiene el analista con algunas técnicas de solución particular y/o la disponibilidad de algoritmos adecuados. Sin embargo, las dificultades continúan después de decidir qué técnica de solución se usará. En efecto, persisten aun problemas para definir adecuadamente las solicitaciones y los modelos del medio de apoyo (suelo). En lo que resta, se trata el problema de la modelación del suelo simplificándolo como un material lineal elástico o viscoelástico.

En comparación con la estructura que soporta, el suelo puede considerarse como un continuo semi infinito tanto en el planteamiento directo como en el de subestructuración. Esta supocición asegura bajo toda circunstancia que no existe un paulatino incremento de energía en el dominio considerado. Cuando se consideran geometrías y condiciones locales complejas, la modelación del continuo semi infinito lleva a formulaciones discretas basadas en técnicas de elementos finitos.

Los elementos finitos pueden modelar bastante bien y en forma económica la estructura y la región de suelo cercana a ella (región cercana, *rc*) no así la región lejana a la estructura (región lejana, *rl*). Por lo tanto, es necesario introducir una frontera artificial (frontera exterior, *fe*) a una cierta distancia de la interfaz entre el suelo y la estructura. Además, se necesita asegurar que la energía es irradiada hacia el exterior de la *rc*. Por lo tanto, el uso de elementos finitos requiere una especial atención en la *fe*. Se han propuesto diferentes formulaciones híbridas para reemplazar la *rl* con representaciones discretas a lo largo de la *fe*, las que han sido obtenidas mediante métodos o criterios independientes. En otros trabajos[1] se hacen referencias a la mayoría de estas formulaciones. El éxito de ellas varía, pero de alguna u otra manera está limitado por las suposiciones hechas sobre la *rl*.

Alternativamente, se pueden utilizar elementos finitos e infinitos para modelar la *rc* y la *rl*, respectivamente[2,3]. Entonces, la *rl* se representa en el análisis mediante elementos infinitos deformables, y a su vez la *rc* se representa por elementos finitos. Aunque en este caso el concepto de *fe* como tal no es válido, es conveniente definir la interfaz entre elementos finitos e infinitos como la *fe*. La formulación de esta técnica cae dentro del método clásico de elementos finitos: discretización del continuo, suposición de funciones de forma, minimización de errores mediante residuos ponderados o principios variacionales, obtención de un conjunto de ecuaciones algebraicas que caracterizan el problema, etc. Consecuentemente, esta técnica permite una solución directa en un paso del problema de interacción suelo-estructura (o de los problemas de impedancia y de dispersión de ondas en el suelo de fundación, en el caso de usar un planteamiento de subestructuración) conservando aún la flexibilidad del método clásico de elementos finitos.

FORMULACION DEL PROBLEMA DE INTERACCION LINEAL SUELO-ESTRUCTURA

Aunque en la práctica el problema de interacción dinámica suelo-estructura es generalmente inelástico (especialmente para el suelo de fundación), la presente formulación se restringe a sistemas tridimensionales lineales elásticos o viscoelásticos. Para éstos se esquematiza una solución directa por elementos finitos/infinitos.

Una vez que un sistema elástico, como el mostrado en Fig. 1a, se discretiza en elementos finitos e infinitos, ver Fig. 1b, los desplazamientos u^e en ambos tipos de elementos son aproximados por

$$\mathrm{u}^e(\mathrm{x}) = \mathrm{N}^e(\mathrm{x})\mathrm{r}^e \tag{1}$$

donde $\mathrm{N}^e(\mathrm{x})$ contiene las funciones de forma supuesta en el punto x, y r^e contiene los desplazamientos nodales del elemento e, con

$$\mathrm{N}^e(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} \mathrm{N}_u(\mathrm{x}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{N}_v(\mathrm{x}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{N}_w(\mathrm{x}) \end{bmatrix}^e \tag{2}$$

tal que $\mathrm{N}^e_y(\mathrm{x})$ contiene las funciones de forma supuestas en el punto x dentro del elemento e correspondientes a la componente de desplazamiento $y(y= u,v,w,)$. Para elementos finitos

$$\mathrm{N}^e_u(\mathrm{x}) = \mathrm{N}^e_v(\mathrm{x}) = \mathrm{N}^e_w(\mathrm{x}) \tag{3}$$

Basándose en la linealidad del modelo, la respuesta del sistema se puede obtener en dos pasos. En el primer paso se obtiene la respuesta del sistema en el dominio de frecuencias para solicitaciones armónicas del tipo $e^{i\omega t}$. En el segundo, se obtiene la respuesta en el tiempo mediante síntesis de Fourier sobre el rango de frecuencias presente en la solicitación. Entonces, para un sistema sujeto a solicitaciones dinámicas que pueden ser representadas por un vector de solicitaciones de amplitud de Fourier $\mathrm{p}(\omega)$, la solución de desplazamientos del sistema como función de frecuencia puede obtenerse[4] de

$$K^*(\omega)r(\omega) = p(\omega) \tag{4}$$

donde

$$K^*(\omega) = K(\omega) + i\omega C(\omega) - \omega^2 M(\omega) \tag{5}$$

se define como la matriz de rigidez dinámica del sistema, tal que K, C, y M son las matrices de rigidez, amortiguamiento viscoso y masa, respectivamente, que están definidas en la manera usual[5].

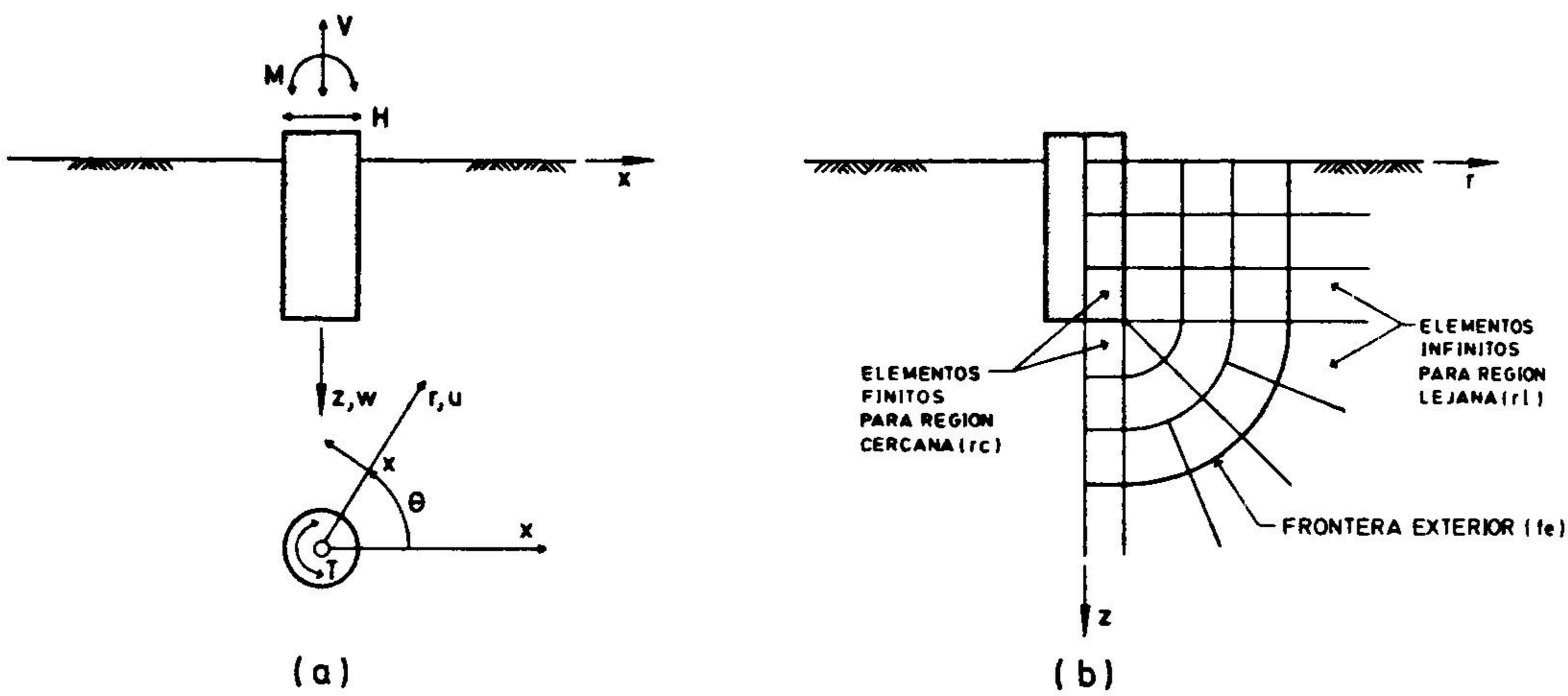


Fig. 1. Fundación enterrada en un medio semi infinito. (a) Definición de coordenadas: x, punto en el espacio; $u^T(x) = [u(x), v(x), w(x)]$, desplazamiento en el punto x; $x = [r, \theta, z]$, coordenadas cilíndricas; $x = [x, y, z]$, coordenadas rectangulares. (b) Sistema de fundación discretizado con elementos finitos e infinitos.

Por ejemplo, para el elemento *e* las matrices de rigidez y de masa coherentes son

$$K^e = \int_{V^e} [B^e]^T D^e B^e \, dV \tag{6}$$

y

$$M^e = \int_{V^e} [N^e]^T \rho^e N^e \, dV \tag{7}$$

respectivamente, donde ρ^e es la densidad de masa del elemento, D^e es la matriz de relaciones constitutivas del elemento, y

$$[\mathrm{B}^e]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \partial \mathrm{N}_u/\partial x & 0 & 0 & \partial \mathrm{N}_u/\partial y & 0 & \partial \mathrm{N}_u/\partial z \\ 0 & \partial \mathrm{N}_v/\partial y & 0 & \partial \mathrm{N}_v/\partial x & \partial \mathrm{N}_v/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial \mathrm{N}_w/\partial z & 0 & \partial \mathrm{N}_w/\partial y & \partial \mathrm{N}_w/\partial x \end{bmatrix}^e \qquad 8$$

la cual relaciona deformaciones con desplazamientos nodales en el elemento e para coordenadas rectangulares tridimensionales.

Si un elemento e se modela con amortiguamiento de naturaleza histerética, la ec. (5) se modifica como sigue

$$\mathrm{K}^*(\omega) = \left|1 + i\beta^e(\omega)\right| \mathrm{K}^e(\omega) - \omega^2 \mathrm{M}^e(\omega) \qquad 9$$

donde $\beta^e(\omega)$ es la razón de amortiguamiento histerético del elemento e como función de la frecuencia ω.

El problema dinámico de interacción suelo-estructura se reduce entonces a encontrar la solución de desplazamientos del sistema como función de la frecuencia, $\mathbf{r}(\omega)$, debida a solicitaciones dinámicas que pueden ser representadas por un vector de solicitaciones de amplitud de Fourier $\mathbf{p}(\omega)$. Tanto la formulación del problema como su aplicación es directa. La definición apropiada de elementos infinitos sin embargo requiere especial atención. Esta materia es presentada brevemente en la próxima sección

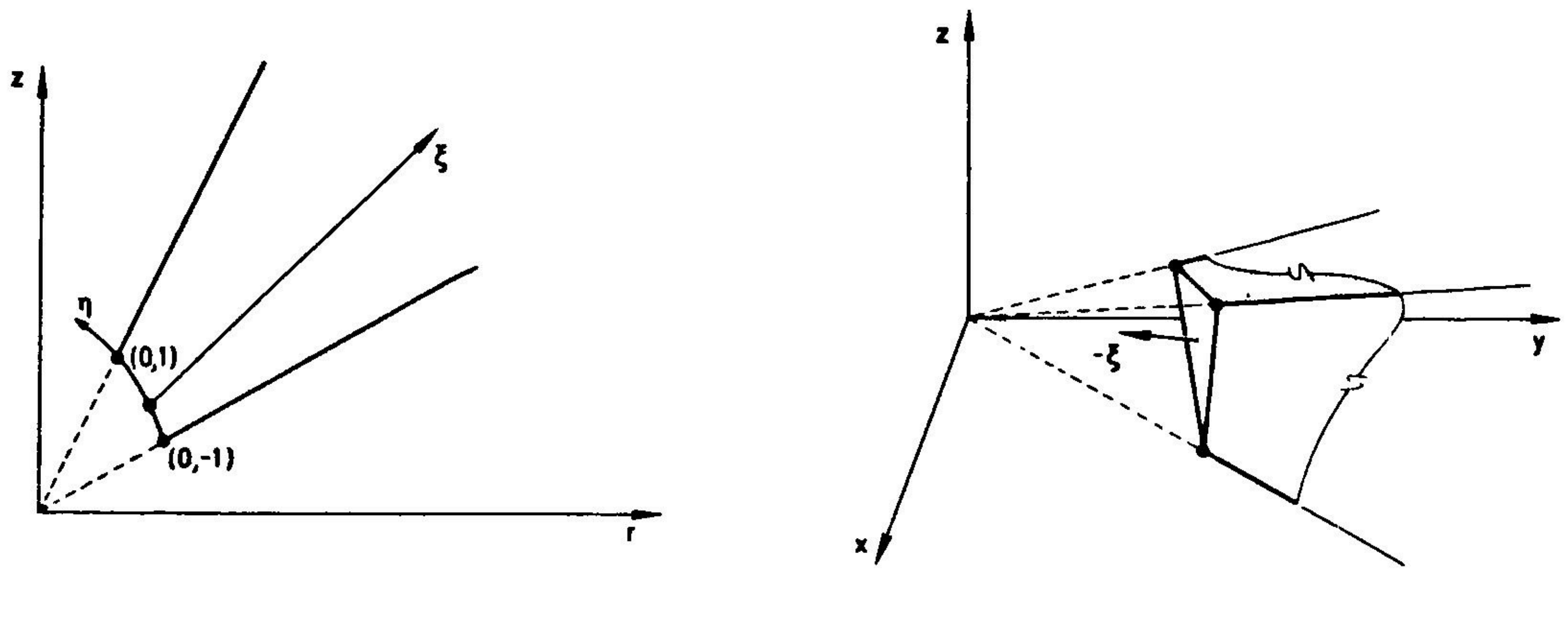
ELEMENTOS INFINITOS PARA PROPAGACION LINEAL DE ONDAS ELASTICAS EN TRES DIMENSIONES

La respuesta dinámica de estructuras enterradas (o superficiales) en medios semi infinitos envuelve la propagación de ondas elásticas en tres dimensiones por lo que es difícil de tratar. Al considerar soluciones analíticas exactas para medios semi infinitos que vibran libremente en forma armónica, es evidente que a través de ellos se propagan diferentes tipos de ondas cada una de las cuales perturba todas las componentes de desplazamiento. Por lo tanto, si se buscan elementos infinitos que modelen apropiadamente la *rl*, se deberían desarrollar diferentes funciones de forma para cada componente de desplazamiento, como se indica en ec. (2). Aun más, estas funciones de forma deberían poder representar los diferentes tipos de ondas que se propagan a través del medio.

Para los elementos infinitos que se muestran en Fig. 2, la función de interpolación que proyecta los elementos del sistema de coordenadas globales al sistema de coordenadas locales, para el nudo j, es

$$M_j(\xi, \eta) = (1 + \xi) L_j(\eta) \qquad 10$$

($0 < \xi < \infty$), donde L_j es el polinomio de Lagrange (elemento axisimétrico, Fig. 2a) o la coordenada triangular de área (elemento tridimensional, Fig. 2b), para el nudo j. La función de forma para una componente de desplazamiento típica, y, y para el nudo j, N_{yj}, se define en Tabla I. Detalles de la generación de las funciones de forma se encuentran en la literatura[6] .



(a) (b)

Fig. 2. Elementos infinitos de tres nudos. (a) Axisimétrico. (b) Tridimensional.

De acuerdo a como están definidos, los elementos infinitos son incompatibles e incoherentes con los elementos finitos adyacentes. Sin embargo, el comportamiento asintótico de las funciones de forma indica que cada desplazamiento tiene tres componentes diferentes (ver Tabla I). Una componente, que representa ondas de Rayleigh, vibra en forma retrógrada y elíptica en planos (r, z) con amplitudes que decaen exponencialmente con $r(z = \text{constante})$ y con $z(r = \text{constante})$. Las otras dos, una que representa ondas de corte y la otra que representa ondas compresionales, tienen amplitudes que decaen exponencialmente con $R(R = \sqrt{r^2 + z^2})$. Mientras que la componente de onda de Rayleigh viaja alejándose del eje z, las componentes de corte y de compresión se alejan del origen. Resultados similares se encuentran en la vibración armónica de un medio semi infinito debido a una fuente oscilatoria normal[7]. Entonces, los elementos son capaces de irradiar ondas de Rayleigh, de corte y de compresión hacia el exterior de la *rc* y son también capaces de representar aproximadamente la rigidez dinámica de la *rl* en problemas que envuelven propagación tridimensional de ondas.

En el caso de solicitaciones torsionales con respecto al eje z, es posible desarrollar elementos infinitos compatibles y coherentes. La función de forma de estos elementos para el nudo j es

$$N_{vj}(\xi, \eta, k_S) = e^{-(1+ik_S R_0)\xi} L_j(\eta) \qquad 11$$

donde R_0 es una distancia característica, por ejemplo $R(\xi = 0, \eta = 0)$, y k_S es el número de propagación de la onda de corte.

TABLA I

FUNCIONES DE FORMA DE DESPLAZAMIENTO PARA ELEMENTOS INFINITOS DE TRES NUDOS

– Función de forma para el desplazamiento y y el nudo j:

$$N_{yj}[r(\xi,\eta); z(\xi,\eta); k_R; k_S; k_P] = \sum_{Q=R,S,P} f_y^Q[r(\xi,\eta); z(\xi,\eta); k_Q]\, G_{yj}^Q$$

– Los coeficientes G_{yj}^Q son elementos de la matriz:

$$\mathbf{G}_y = \mathbf{F}_y^{-1} = [f_y^Q(r_j, z_j, k_Q)]^{-1} = \begin{bmatrix} f_y^R(r_1, z_1, k_R) & f_y^S(r_1, z_1, k_S) & f_y^P(r_1, z_1, k_p) \\ f_y^R(r_2, z_2, k_R) & f_y^S(r_2, z_2, k_S) & f_y^P(r_2, z_2, k_p) \\ f_y^R(r_3, z_3, k_R) & f_y^S(r_3, z_3, k_S) & f_y^P(r_3, z_3, k_p) \end{bmatrix}^{-1}$$

– Las funciones f_y^Q se definen como sigue:

Desplazamiento (y)	Onda de Rayleigh (f_y^R)	Onda de corte (f_y^S)	Onda de compresión (f_y^P)
u	$\left[e^{-p\lvert z\rvert} - \dfrac{2ps}{k_R^2 + S^2} e^{-s\lvert z\rvert}\right] e^{-(1+i)k_R r}$	$\dfrac{z}{R}\, e^{-(\xi + ik_S R)}$	$\dfrac{r}{R}\, e^{-(\xi + ik_p R)}$
v	$e^{-p\lvert z\rvert} \dfrac{e^{-(1+i)k_R r}}{k_R r}$	$e^{-(\xi + ik_S R)}$	$\hat{f}_v^R$
w	$\left[e^{-p\lvert z\rvert} - \dfrac{2k_R^2}{k_R^2 + S^2} e^{-s\lvert z\rvert}\right] e^{-(1+i)k_R r}$	$\dfrac{z}{R}\, e^{-(\xi + ik_S R)}$	$\dfrac{z}{R}\, e^{-(\xi + ik_S R)}$
v	$\hat{f}_v^R = e^{-s\lvert z\rvert} \dfrac{e^{-(1+i)k_R r}}{k_R r}$	–	–

– Definición de parámetros:

r, θ, z = coordenadas cilíndricas ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$, para coordenadas rectangulares x, y, z).
R = $\sqrt{r^2 + z^2}$, coordenada radial.
ξ, η = coordenadas paramétricas para elementos infinitos.
k_Q = número de propagación de onda ($Q = R$: Rayleigh; S: corte; P: compresión).
s, p = $\sqrt{k_R^2 - k_{S,P}^2}$

EJEMPLO NUMERICO
FUNCIONES DE FLEXIBILIDAD DINAMICA PARA UNA PLACA CIRCULAR RIGIDA

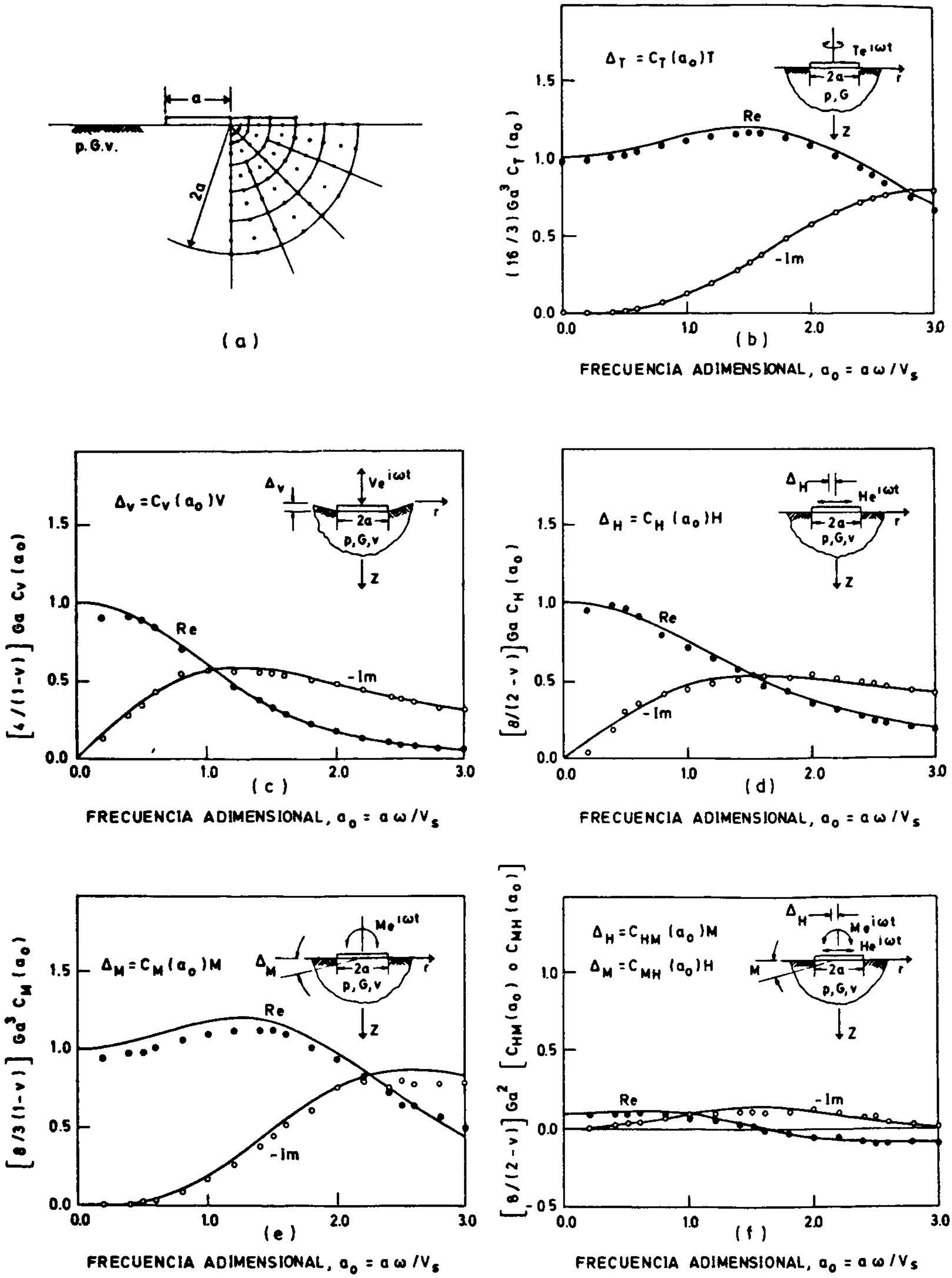
La geometría del problema es axisimétrica, luego se usan elementos axisimétricos. Aprovechando las ventajas del método, la placa rígida y la zona del medio próxima a ella en la *rc* se modelan con un número razonablemente pequeño de elementos finitos de nueve nudos, y la *rl* con un número aun menor de elementos infinitos. La *fe* se define como una superficie hemisférica por conveniencia. En general, la *fe* puede definirse en forma arbitraria.

El método se aplicó para obtener la respuesta de una placa circular rígida sobre un medio semi infinito homogéneo, isótropo y elástico, sometida a solicitaciones armónicas de tipo torsional, vertical, horizontal y de rotación vertical. La *rc* se modeló mediante decinueve elementos finitos y la *rl* mediante cuatro elementos infinitos, como se muestra en Fig. 3a. La *fe* está localizada a una distancia de dos radios de placa, medida a partir del eje vertical de la misma. En las Figs. 3b - f se comparan las funciones de flexibilidad dinámica obtenidas con las correspondientes soluciones exactas[8,9].

Las soluciones numéricas obtenidas con el modelo de elementos finitos concuerdan con las soluciones exactas. Sin embargo, salvo para el caso torsional, en los restantes se observa que la discrepancia entre las soluciones numéricas y exactas no es uniforme. Esto se debe a la naturaleza incompatible del elemento infinito usado para resolver los casos de solicitación vertical, horizontal y de rotación vertical. No obstante, en los ejemplos tratados son menores del 9%.

CONCLUSIONES

Se ha presentado un método directo de elementos finitos/infinitos para el análisis lineal elastodinámico (o viscoelastodinámico) de la interacción suelo-estructura. Al modelar la región lejana a la estructura con elementos infinitos el método permite una reducción significativa en el tamaño de la malla en la región cercana a la estructura. Las soluciones se obtuvieron con un pequeño número de grados de libertad, lo que condujo a soluciones económicas de precisión satisfactoria. Este método permite tratar fácilmente sistemas estratificados. El problema se reduce esencialmente a la definición de elementos infinitos apropiados.



Re = PARTE REAL ●, o = SOLUCION POR ELEMENTOS FINITOS

Im = PARTE IMAGINARIA —— = SOLUCION EXACTA[8, 9]

Fig. 3. Placa circular rígida sujeta a solicitaciones armónicas sobre un medio semi infinito, homogéneo con $\nu = 1/3$. (a) Malla de elementos. (b) Flexibilidad dinámica torsional, C_T. (c) Flexibilidad dinámica vertical, C_V. (d) Flexibilidad dinámica horizontal, C_H. (e) Flexibilidad dinámica rotacional, C_M. (f) Flexibilidad dinámica de acoplamiento, C_{HM} y C_{MH}.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece sinceramente el aliento y los valiosos consejos de Robert L. Taylor. J.E. Luco* facilitó gentilmente datos originales. Este trabajo fue financiado por National Science Foundation (grant PFR 79-08261), bajo la supervisión del Profesor Joseph Penzien.

REFERENCIAS

1. JOHNSON, J.J. (ed), Soil-structure interaction: The status of current analysis methods and research. *Seismic Safety Margins Research Program*, NUREG/CR - 1780, UCRL - 53011, Lawrence Livermore Lab., California (1981).
2. UNGLESS, R.F. *An infinite element. Tesis de M.A.Sc.*, University of British Columbia, 1973.
3. BETTESS, P. Infinite Elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, nº 11, 1977, pp. 53-64.
4. HURTY, W.C. y RUBINSTEIN, M.F. *Dynamics of structures*, Prentice-Hall 1964.
5. ZIENKIEWICZ, O.C. *The finite element method*, 3ra edición Mc. Graw-Hill, 1978.
6. MEDINA, F. *Modelling of soil-structure interaction by finite and infinite elements*, EERC/UCB - 80/43, University of California, Berkeley, 1980.
7. GRAFF, K.F. *Wave motion in elastic solids*, Ohio State University Press, 1975.
8. LUCO, J.E. y WESTMANN, R.A. Dynamic response of circular footings, *Proceedings of the ASCE*, 97, EM5, (1971), pp. 1381 - 1395.
9. VELETSOS, A.S. y WEI, Y.T. Lateral and Rocking vibration of footing, *Proceedings of the ASCE*, 97, SM9 (1971), pp. 1227 - 1248.

DIRECT FINITE ELEMENT METHODS FOR LINEAR SOIL-STRUCTURE INTERACTION

SUMMARY

A direct method for solving dynamically excited structures on elastic semi infinite media is presented. The method consists of modeling the near field with finite elements and the far field with infinite elements. Frequency dependent infinite elements are also presented to represent the far field dynamic stiffness. The elements are capable of carrying energy out of the near field in the form of Rayleigh, shear and compressional elastic waves. The method is successfully applied to find the compliance functions of a rigid circular plate subjected to harmonic loading on semi infinite media. By using infinite elements, the size of the near field may be kept small, yielding inexpensive solutions.